トルケル・フランセーン

ゲーデルの定理

利用と誤用の不完全ガイド

田中一之訳

みすず書房

GÖDEL'S THEOREM

An Incomplete Guide to Its Use and Abuse

by

Torkel Franzén

First published in 2005 by A K Peters, Ltd.

喜びの中でも，絶望の中でも，なお輝いて美しい
マーシャのために

イラスト　須山奈津希

目　次

はしがき

ゲーデルの不完全性定理に関する一般向けの本はすでに山ほど存在している．そこにまたぞろ本書を世に送りだす理由は，数学的立場で，とくに計算可能性理論の視点からこの定理を読み解き，同時に数学の外に蔓延するこの定理の濫用万般について批判を加えるような書物はこれまでなかったからである．

長年の間，筆者はインターネット上の不完全性定理への言及記事を閲覧し，論評してきたので，本書にもその経験が幅広く影響している．しかし，電子的な形でしか存在しないと思われるテキストの引用については，あえてそのアドレス(URL)を記載していない．それは，すぐに古くなってしまうからである．けれども，検索エンジンを使えば，インターネットのどこかにいまなお残る引用文のありかは簡単に探しだすことができよう．

また，インターネットの非公式な発言のなかに見つけた文言についてはたいがい出典を明記せず，場合によっては多少手を加えて引用している．それらは，社会一般の通念や理路を説明するために用いるものだからである．

ここで，本書の執筆を助けてくれた人たちに謝辞を述べておきたい．最初に，インターネットで私がゲーデルの定理について意見を交わした多くの人たちに感謝の意を表する．文中に名前を挙げた人もそうしなかった人もいるが，彼らの寄与なしには本書がこうして世に現れることはなかった．

それから，有益な助言をいただいた次の人たち，アンドリュー・バウチャー，ダムヤン・ボヤジエフ，アレックス・ブラム，ジェフ・ダルトン，ソロモン・フェファーマン，ジョン・ハリソン，ジェフリー・ケトランド，ペイニュ・ラアチカイネン，そしてチャールズ・シルバーに感謝する．最後に，本書の執筆にはルレオ工科大学の設備が欠かせず，それらを利用させてもらったことをありがたく思う．

ところで，本書に不備や矛盾があっても，著者にはまったく非がない．なぜなら，不完全性定理のどんな本も不完全であるか矛盾しているかであるというのが，つまるところゲーデルが証明した事実だからである．おや，違ったかな．この本は，数学的な証明や定義に不慣れな読者にはひょっとすると少し難しいところもあるかもしれない．しかし，たとえところどころ拾い読みいただくだけでも，不完全性定理をこうして非数学的に用いることの是非を判断する力となり，そしてこの定理が切り開いた哲学と数学のパノラマを堪能いただけるものと思う．

トルケル・フランセーン

1. 序

1.1 不完全性定理とは

純粋数学の定理が，数学の世界の外で関心をもたれることは珍しい．最近で言えば，フェルマの最終定理がワイルズ[1]によってついに証明されたことが鳴り物入りで宣伝され，一般大衆の関心を惹いたことがあった[2]．それから，数学に無縁な人でも，直角三角形の斜辺の平方についてのピタゴラスの定理くらいなら，どんなものか説明することができるだろう．名優ダニー・ケイが映画の中で『斜辺の平方』という歌[3]を唄っていたくらいだ．それでも，1931 年に発表されたゲーデルの不完全性定理ほど，数学者以外の人々の興味をそそるものは他にないといってもいいだろう．この定理がここ数十年に得た話題性の高さは，とくにインターネットで顕著である．そこには，世界中のありとあらゆる話題に関して何千もの討論のサークル（ニュースグループと呼ばれる）が存在しているが，どんなグループでも遅かれ早かれ誰かがゲーデルの不完全性定理をもちだすようだ．ロジック，数学，計算，哲学に関するニュースグループでなら不思議はないが，政治，宗教，無神論，詩歌，進化論，ヒップホップ，デートなどのグループにも

1) Andrew John Wiles (1953 年生) は，オックスフォードとケンブリッジに学び，1995 年にフェルマの定理の証明を *Annals of Mathematics* 誌に発表した．現在，プリンストン大学教授．

2) 本書原著の出版のあと，ペレルマンによるポアンカレ予想の解決も大きな話題になった．

3) ダニー・ケイ主演の映画『僕はツイてる』(1958) の挿入歌．

それが見られるのだ．不完全性定理への関心は，決してインターネットに限るものではない．活字になった書物や記事でも，哲学者，数学者や論理学者ばかりでなく，神学者，物理学者，文学者，写真家，建築家などさまざまな分野の専門家が，不完全性定理をもちだし，論じている．詩歌や音楽の創作さえ刺激しているようだ．

形式論理学のような専門領域以外では，不完全性定理への言及の多くは，むしろ見るからにばかげていて，ひどい誤解や自由連想に基づいているように思われる．（例えば，「ゲーデルの不完全性定理は，客観的現実の存在は証明できないことを示している」とか，「ゲーデルの不完全性定理によって，すべての情報は本質的に不完全で，自己言及的である」とか，さらには「存在と意識を同等に考えることによって，私たちはゲーデルの不完全性定理を進化論に応用できる」など.）アラン・ソーカル(4)とジャン・ブリクモンは，ポストモダン思想に対する論評［Sokal and Bricmont 98］の中で，「**ゲーデルの定理こそ汲めども尽きぬ知的濫用の泉である**」と述べ，レジス・ドブレ，ミシェル・セールらの文章を槍玉にあげている．けれども，ゲーデルの定理によって触発された非数学的議論，アイデア，考察は，決してポストモダニストの過剰性を表すようなものばかりではなく，むしろ多様な背景をもつ大勢の人々がこの定理について考える際に自然に心に浮かぶようなものもたくさんある．例えば，「ある種の事実は，論理や数学でうまく証明できない」とか，「何ものも確実に知り尽くすことはできない」とか，「人間の心は計算機ができないこともできる」などだ．

ゲーデルの定理に関して本書を新たに上梓する理由は，不完全性定理の内容，射程，そして限界をきちんと解説し，形式論理学の知識のない読者でも，この定理をもちだす上記のような論法や説明に対して，誇張のない，筋の通った見解をもてるようにするためである．本書では，一般によく見

4）物理学者 Alan Sokal (1955 年生) は，人文系の評論が数学や科学用語をデタラメに使用していることを実証するために，自ら悪戯の疑似論文を書いて人気雑誌『ソーシャル・テキスト』に投稿したところ，そのまま掲載された．この事件をもとに，ベルギーのブリクモンとともに『知の欺瞞』［Sokal and Bricmont 98］というポストモダン思想批判の書を出版した．

られる誤った論法や説明を多数引き合いにだしているが，それは通俗的誤解を解消して，哲学的争点をより明確にするためである．そういう論法や説明が特定の著者に帰せないときは，そのような説明の典型と言えるようなインターネットの上の文章に，必要な修正を加えて例示している．

さて，ゲーデルは，1931 年にオーストリアの科学雑誌で，彼が証明した不完全性定理を公表した．(ドイツ語で書かれた)彼の論文のタイトルを翻訳すれば，「プリンキピア・マテマティカと関連体系における形式的に決定不能な命題について I」となる．(パート II が計画されていたが，結局書かれなかった．)『プリンキピア・マテマティカ』(以下 PM) は，バートランド・ラッセルとアルフレッド・ノース・ホワイトヘッドによって，1910－1913 年に出版された 3 巻の記念碑的著作だ．数学の論理的基礎づけを，一見してわかりやすいとはとても言えないような公理と推論規則の形で推進し，当時知られている数学のすべてをそこで形式化して証明しうるようにした．ところで，ゲーデルの論文では 2 つの定理が証明されており，それらは**第一不完全性定理**と**第二不完全性定理**として知られている．(「ゲーデルの不完全性定理」という呼称は，これら 2 つの定理を両方一緒に指す場合にも，いずれか一方だけを指す場合にも用いられる．) 第一不完全性定理が立証したことは，PM の体系がゲーデルの言う ω 無矛盾性(「オメガ無矛盾性」) を満たすという前提の下で，**不完全**であること，つまりこの体系の言語で表されるが，この体系では証明も反証もできない言明が存在するということである．そのような言明は，体系において**決定不能**であると言われる．第二不完全性定理は，この体系が**無矛盾**であるなら，その無矛盾性は体系内では証明できないことを示している．ただし，ある体系が無矛盾であるとは，肯定的にも否定的にも証明されるような言明はその体系の言語内に存在しないということである．

ゲーデルが彼の証明で仮定した「ω 無矛盾性」は，通常の「無矛盾性」より強い性質で，直観的にも理解しやすい「無矛盾性」の概念と違って，技術的な趣向が強い．そこで，1936 年にアメリカの論理学者 J・バーク

リー・ロッサー[5]が，ゲーデルの定理を強化して，「無矛盾性」の仮定だけでも，体系が不完全であるという結論が導けることを示した.

少し技術的に細かい話をすると，じつはゲーデルは彼の議論をPMの体系に対しておこなったのではなく，それと関連している体系で，彼がPと呼ぶものに対して実行している．しかし，彼の結果がPMにも適用されることは明らかで，じつのところ数学全般に対する公理系に限らず，数学の一部分だけを含んでいる多様な公理系についても同じく適用できるのだ．今日では不完全性定理は，次のような形式体系についての定理として述べられることが多い．すなわち，ある程度の初等算術が表現でき，算術の基本法則が証明できるような形式体系である．そして，この定理の主張は，そのような体系が無矛盾であるならば，不完全であり，その無矛盾性は体系自身の中では証明できないというものだ.

ゲーデルの論文で開発された論法は，当時の論理学者や数学者にはなじみのないものだったので，熟練した数学者（例えば，公理的集合論の創始者アーネスト・ツェルメロ）でさえその証明を理解するのに苦労した．だが今日では，他の学問の発達と同様に，この分野もそれに対する理解も深化しており，もはやその証明はまったく難解とは考えられなくなっている．使われた方法はすでにありふれたものとなり，そしてその証明は見通しよく改良され，また一般化されている．当然その詳細を理解するには，形式論理学の手法と概念に精通している必要がある．しかし，この本は論理学や数学について（学校教育での数学の基本を超える）専門知識をあえて仮定しない．というのは，この定理を厳密でなくても適切に理解することは，形式論理の助けなしにも可能であり，また同様にこの定理のさまざまな応用と誤用についての理解も形式論理の助けなしに可能であると思うからだ.

もちろん，不完全性定理の厳密ではないが適切な理解と言えるものがど

5） John Barkley Rosser (1907–1989)．プリンストン大学でチャーチに師事し，ゲーデルの講義にも参加した．コーネル大学とウィスコンシン大学で教えた．第一不完全性定理の改良と，λ計算のチャーチ＝ロッサーの定理で有名.

ういう条件を押さえていればいいかについては，さまざまな意見があるだろう．例えば，次のような講釈まであるのだ．

> ゲーデルの不完全性定理は，数学的なアプローチや証明なしにも直観的に理解しうるものである．実際，禅仏教思想のなかにも明瞭にそれとわかる形で不完全性の概念が出現しているからだ．

不完全性定理は，形式体系の無矛盾性と完全性についての定理である．だが，「矛盾」「無矛盾」「完全」「不完全」「体系（システム）」という語は，論理学の術語として用いられるだけでなく，日常言語において多様な使われ方をしている．だから，ゲーデルの定理が，インフォーマルな意味での不完全性，体系，無矛盾性に関する多様なアイデアと結びつけて考えられてしまっていても不思議はない．第4章で詳しく論じるが，このような結びつきはたいがい不完全性定理の本質とほとんど，あるいはまったく関係ない．禅宗の研究から導かれるかもしれない定理の直観的理解といったことは，この本が語りうることでは到底ない．

1.2 ゲーデルの人生と仕事


クルト・ゲーデル
(1906–1978)

ゲーデルはドイツ人だ，いやオーストリア人だ，本当はチェコ人だ，あるいはアメリカ人だなどとさまざまな記述がある．これらの記述はすべて，ある意味で正しい．ゲーデルはドイツ語を話し，文化的な背景ではドイツ人である．しかし，彼は1906年に中央ヨーロッパのモラビアの都市，当時の繊維工業の中心地だったブルノ（ドイツ語名ブリュン）で裕福な家庭に生まれている．ゲーデルの出生時に，モラビアはオースト

リア・ハンガリー帝国の一部だった．第一次世界大戦後〔1918年〕にオーストリア・ハンガリー帝国は解体し，ゲーデルは新しく建国されたチェコスロバキアの一市民として，またブルノでは多数派のドイツ語を話す住民集団の一員として成長した．1929年，彼はウィーン大学で博士論文を仕上げていたときに，オーストリア市民になっている．そして，オーストリアが1938年にナチスドイツによって併合された後は，少なくともドイツ当局の見方では，彼はドイツ国籍であった．ゲーデルはユダヤではなく，そして見たところ政治にはまったく無関心な様子だったが，ユダヤ人の自由主義結社に荷担する学者や知識人の一味であるという疑いをもたれてもいた．そのためか当地で大学講師の職を求めることの困難に直面し，また街頭でナチ青年の一団に襲われることも一度あった（そのときは，彼の妻が追い払った）．このような出来事と，ドイツ軍への徴兵の怖れが，ゲーデルを合衆国に移住する方向に急がせた．1940年，さまざまな困難ののちにやっと米国移住を実現し，プリンストンの高等研究所（IAS）に職を得た．そして，1948年に彼はアメリカ市民となった．

ゲーデルはとくに彼の不完全性定理で有名だが，他にも論理学における基本的な発見をいくつもしている．それらは，主として1929年から1940年までのウィーン時代になされているが，その間にも彼は米国のIASとノートルダム大学を訪問している．彼は博士論文において，1階論理の完全性定理を証明した．この定理については，第7章で説明する．続けて彼は，第一不完全性定理，その少しあとで第二不完全性定理を証明した．それから，集合論におけるたいへん重要な結果も証明したが，それについては本書の本筋に必要な範囲で触れる程度にとどめる．これらの結果は，数理論理学と数学基礎論に多大な発展をもたらした画期的な仕事である．また，この非常に生産的な期間に，彼は他にいくつも重要な結果を証明している．その後1976年まで，彼はIASに在籍した．1940年代には，今日ゲーデルのダイアレクティカ解釈[(6)]（1958年にこの結果をようやく発表した雑誌の名前による）として知られる，構成的数学[(7)]と関係する技法を発展さ

せた．また彼は，アインシュタインの一般相対論に関するオリジナルな仕事もしており，重力方程式に，過去への旅行が理論的に可能となるような宇宙を記述する解が存在することを示した．それ以外では，彼の関心はおもに哲学に向かっていた．1940年以降あまり論文を発表していないが，彼は後半生に多数の学問的栄誉を授けられた．そして，1978年にゲーデルは永眠した．

ゲーデルの繰り返される精神的および肉体的な健康問題，彼の結婚生活，ウィーンでの学究生活，アインシュタインとの友情など，彼の人生についてさらに詳しく知りたい読者は，ドーソンによる伝記［Dawson 97］とそこで参照されている文献をご覧いただきたい．

不完全性定理のインパクトと重要性については，しばしば大げさな主張が繰り返されてきた．例えば，それは「数学の思考に変革をもたらした」とか，「数学ばかりでなく，科学全体も一新した」とか，さらにはゲーデルの仕事は「数学だけではなく，哲学，言語学，計算機科学と宇宙論にまで革命を起こした」というような，とんでもなく熱に浮かされたような発言もある．このような主張は，まったく乱暴な誇張だ．不完全性定理が一番大きな衝撃を与えたと思われる数学においてさえ，革命らしきものは何も起きていないのだ．

この定理は，数理論理学という数学の比較的小さな領域では四六時中使われているものの，普通の数学者の仕事にはほとんど何も役に立っていない．確かに，数学者たちは不完全性の現象をだいたい知っていて，数学の標準的公理系においては解決不可能な問題がありうることも承知している．しかし，不完全性が数学的な意味で問題になると考えるためには，そう考えるだけの証拠をきちんと示す必要があるのだ．また，ゲーデルの「回転する宇宙」，つまり一般相対論の方程式の新しい解も，宇宙論に大きなイ

6) 計算可能な高階関数（原始再帰的汎関数）を用いた算術の解釈（モデル）のことで，ゲーデルはそれによって算術の無矛盾性を証明した．*Dialectica* は，スイスの分析哲学系の季刊誌．

7) 対象を具体的に構成（または計算）されるものだけに制限して数学を展開する立場．直観主義数学の現代版．

ンパクトを与えているわけではない．いわんや，計算機科学はゲーデルの定理が証明されたときに存在していなかったのだから，この定理によって革命が起きたはずがない．計算機科学の理論的な基礎は，むしろ英国の数学者かつ論理学者であるアラン・チューリング[8]の仕事に結びついている．1936 年に彼は，理想化されたデジタルコンピュータの理論的モデルを導入して，それを「停止問題が非可解である」ことの証明に使ったのである．この結果は第一不完全性定理と密接な関係があり，両者の基本的関連については後の章で述べる．

ゲーデルが 1929 年と 1930 年に証明した定理（1 階論理の完全性定理と不完全性定理）は，それより四半世紀前の特殊相対性理論と同じように，時代の風の中にあった．あと数ヶ月経てば，時間の問題で他の誰かがこれらの定理を発見していただろう．少なくともゲーデル自身はそう感じていた [Kreisel 80]．完全性定理については，ノルウェーの論理学者トーラルフ・スコーレム[9]があと一歩のところでこの定理に到達できなかった．その原因は，有限的でない論証に対するスコーレムの哲学的偏見にあると，ゲーデルは（正しいか，間違っているかは別として）みなしていた．第一不完全性定理に関しては，ドイツの数学者パウル・フィンスラー[10]が実際に優先権を主張した．しかし，彼が略述した議論はゲーデルの仕事によって明確で正しいものにはなりうるけれども，その発表内容は何かの証明と言えるようなものではなかった．また，計算可能性の理論で先駆的な仕事をしたポーランド系アメリカ人の論理学者エミール・ポスト[11]は，ゲーデルの洞察にきわめて近いところまできていたが，確固たる形式的結果は何も産みだしてい

---

8) Alan Turing (1912–1954) はイギリスの数学者．チューリング機械に関する論文を書いたあと，1937–38 年にはプリンストン大学でチャーチに師事した．暗号の研究や数理生物学の研究でも画期的な仕事を残した．

9) Thoralf Skolem (1887–1963) は，オスロー大学教授．1 階論理のモデル理論で先駆的な仕事をなした．数論の仕事も多い．

10) Paul Finsler (1894–1970) はドイツに生まれ育ち，1927 年からチューリヒ大学教授としてスイスに住んだ．主たる専門は微分幾何学．

11) Emil L. Post (1897–1954) は，命題論理の完全性を証明し，チューリング機械と同等な力をもつ計算モデルを発明した．ニューヨークのシティ・カレッジで長年教えた．

ない．とくに，第二不完全性定理を系として生みだすためにはおそらく，第一不完全性定理に対するゲーデルの証明の数学的正確さと徹底性が，なくてはならないものだった．

論理学におけるその多様な応用はさておき，不完全性定理は，論理と数学の本性に関する多くの哲学的な問いを提起している．これらの問いや，この定理が数学に関する考察に与える示唆は，その“革命的インパクト”など誇張せずとも，非常に興味深く，意義深いものだ．とくにこの本で扱いたいことは，不完全性定理に関して哲学的にとても重要と思われる次の2点である．第一は，初等的手法で証明できないような初等整数論の命題が，無限集合の存在を主張する非常に抽象的な数学的原理を用いて，論理的に導出されることである．第二は，数学的に正しいと思われる公理からできているどんな形式体系にも不完全性定理が適用されること，したがって，私たちの数学的知識のすべてをひとつの形式体系として記述できないことをこの定理が示していることである．

1.3 本書の構成

本書の解説スタイルは一応伝統的な説明の流儀に従っている．すなわち，具体的な討論の前に一般的な説明を与え，概念を使用する前にはその導入と説明を行っている．しかし，読者は興味のあるところから入って，他の部分に飛んでもいいし，さらに理解が進んで有益だと思えるときにすでに読んだ部分に戻ることもお勧めしたい．なじみのない用語が最初に導入され，説明されている場所を探すには，巻末の索引が手がかりになるだろう．

不完全性定理は，数学の（一部分の）公理化に関する“数学の定理”である．したがって，第**2**章におけるこの定理の概説は，算術の話題からはじめる．数学や数理哲学の枠から外れた，不完全性定理の“応用もどき”に興味のある読者は，第**4**章から読みはじめてもよい．他方，数学

に興味のある読者にとっては，第 **2** 章と第 **3** 章でなされる不完全性の数学的解説と，いくつかの基本的な哲学問題に関する検討が興味にかなうだろう．神学における不完全性定理の神通力や，心の哲学における同様の応用（「ルーカス＝ペンローズの主張」）は第 **4**，**5**，**6** 章で扱われる．そして，グレゴリー・チャイティンの哲学的主張に関する検討は第 **8** 章で行う．補遺は，不完全性の形式数学的な諸相について解説を希望する読者のために付け加えたものである．

なお，この本を拾い読みしやすくするために，後半部分では第 **2** 章の内容の繰り返しがかなりあることをお断りしておく．

2. 不完全性定理　総論

2.1　算術の問題

数学の言語は，数学者以外にはまったく意味のわからない記号や，専門分野外の数学者にはほとんど意味が通じないであろう用語であふれている．けれども，論理学において**初等算術の言語**と呼ばれている数学言語は，小学校で算数を習った人なら誰でも知っているものだ．それは，自然数（非負整数）0, 1, 2, ……と，それらの足し算と掛け算というおなじみの演算を扱うだけである．にもかかわらず，数学の最も有名な未解決問題の数々，そして最も困難な問題の数々はこの初等算術の言語で定式化して論ずることができるのだ．

まず，**素数**は，1とそれ自身によってしか割り切れない，1より大きな自然数である．したがって，最初のいくつかの素数を挙げると，2（唯一の偶素数），3, 5, 7, 11, 13, 17, ……である．西洋における純粋数学に関する最初の重大事件は，素数が無尽蔵，つまり無限個あることの発見である．言い換えれば，任意に与えられた素数より大きい素数が必ずあるということだ．これは，**ユークリッドの原論**（前300年ごろ）において，単純かつ巧妙な議論によって証明されている．それから大凡2千年後，偶数0, 2, 4, 6, 8,……を観察して，4以上はすべて2つの素数の和として表せるらしいことがわかった．すなわち，4＝2＋2，6＝3＋3，8＝5＋3，10＝5

＋5，12＝7＋5，……．しかしながら，これについては，まだ確かな証明が得られていない．「2よりも大きな偶数はすべて2つの素数の和になる」という命題は，初等算術における**ゴールドバッハの予想**として知られ，未だ証明も反証もされていないのだ．素数に関するまた別の未解決問題は**双子素数予想**で，その主張は「$p+2$ も素数であるような素数 p が無限に存在する」というものである．

次に，ある種の算術的問題の集まりについて調べよう．これらの問題に対しては，自然数だけでなく，負の数 -1，-2，-3,……を含めた**整数**全体の言葉で述べるほうが都合がよい．**ディオファントス方程式**（3世紀のギリシャの数学者ディオファントスに由来する）は，$D(x_1,\ldots,x_n)=0$ の形の方程式のことである．ここで $D(x_1,\ldots,x_n)$ は係数が整数の多項式，つまり未知数 $x_1,\ldots,x_n$ から，整数，掛け算，足し算，引き算を使って，組み立てられる式である．等式の**解**とは，その式の値を0にするような，$x_1,\ldots,x_n$ への整数の割り当てのことだ．いくつか例を見れば，これらの定義は明らかになるだろう．まず，次のようなものが，ディオファントス方程式である（ここで，x^2 は $x\cdot x$ の略記，y^4 は $y\cdot y\cdot y\cdot y$ の略記，$5y$ は $5\cdot y$ の略記などとする）：

(i)　$x+8=5y$
(ii)　$x^2=2y^2$
(iii)　$x^2+y^2=z^2$
(iv)　$x^4+y^4=z^4$
(v)　$y^2=2x^4-1$
(vi)　$x^{18}-y^{13}=1$

上記の等式の右辺は0でないが，移項して $D(x_1,\ldots,x_n)=0$ の形の方程式に直すのは簡単だ．例えば，最初の等式は $x+8-5y=0$ となり，次は $x^2-2y^2=0$ となる，などである．

ディオファントス方程式の研究（その解を見つけて記述することや，解をもつかどうかを判定すること）は，何世紀にもわたり数学の専門的領域のひとつである．ディオファントス問題には，きわめて簡単なものから，どう見ても絶望的に難しいものまであり，数学者たちはさまざまな種類のディオファントス方程式を研究するのに並外れた才能を発揮してきた．

上に挙げた最初の等式は，明らかに無限個の解をもっている．どんな整数 n に対しても，$x=5n-8$, $y=n$ は解である．しかし，2番目の等式は，$x=0$, $y=0$ 以外に解をもたない．ユークリッドの原論における証明，すなわち伝統的にピタゴラス学派に帰すとされる議論によって，2は有理平方根をもたないことが示されるからだ．斜辺の平方に関するピタゴラスの定理によって，正方形の対角線はその辺と有理比にならないということと同じである．（つまり，ある自然数 n と m に対して，辺の長さが n 単位，対角線の長さが m 単位となるような長さの単位はないということだ．）第3の等式は，無限に多くの解をもち，その解は「ピタゴラスの三つ子」（ピタゴラスの定理との関連による）と呼ばれる．その特別な解 $x=3$, $y=4$, $z=5$ は，古代には地形測量の際に直角を得るための手段として実用されていた．4番目の等式はゼロ以外の整数解をもたないが，その証明は自明からはほど遠い．「n が2より大きいときに $x^n+y^n=z^n$ の形の等式は正の整数解をもたない」という主張をフェルマの最終定理（あるいは，フェルマの命題もしくは予想）という．これは，高等数学における何人もの数学者の努力を結合して，ついに1994年に証明された．5番目の等式は，正の解を2つだけもっている．すなわち，$x=1$, $y=1$ と $x=13$, $y=239$ である．これは，1942年にノルウェーの数学者ウィルヘルム・リュングレン(12)によって（非常に複雑な数学的議論を使って）証明された．最後の等式は，x と y が共に0でないような解はもたない．これは**カタラン予想**（1844）からの帰結である．カタラン予想というのは，「8, 9の組み合わせ以外に，連続する2つ

12） Wilhelm Ljunggren（1905–1973）は，ノルウェーの数論学者．スコーレム（脚注9）の弟子．オスロー大学教授．

の自然数が共に完全ベキ数，つまり1より大きなnとkによってn^kと表せる数になることはない」というものだ．この予想は，プレダ・ミハイレスク[13]によって2002年に証明された．

算術の問題は必ずしも素数やディオファントス方程式を扱うとは限らない．**コラッツ予想**（$3n+1$予想とか，ウラムの問題とか，別の名前でも知られている）は次のような主張である．任意の正の自然数nからはじめて，それがもし偶数であれば2で割って商$n/2$を求め，もしnが奇数であるなら$3n+1$を計算する．そうして得られた数に，また同じ規則を適用する．これを繰り返していくと，最終的に必ず1になるというものだ．例えば，7からはじめると，

$$7, 22, 11, 34, 17, 52, 26, 13, 40, 20, 10, 5, 16, 8, 4, 2, 1$$

となる．

コラッツ予想の証明は，懸命な努力にもかかわらずまだ発見されておらず，この問題はきわめて難しいと一般に考えられている．

算術の問題の論理的特性

算術の話は不完全性定理を考えるうえで大きな役割を演じるが，しかし幸いにも私たちは算術の超難問に立ち向かう必要はない．その代わりに，そのような問題の比較的単純な論理的側面を扱うことになる．

ゴールドバッハの予想は，「2より大きなすべての偶数は2つの素数の和である」という主張だ．同値な定式化として，「すべての自然数が，3より小さいか，奇数か，2つの素数の和であるかという性質をもつ」とも言える．こう言い換えてみると，与えられた数がこの性質をもつかどうかを判定する**アルゴリズム**が存在することはすぐわかる．アルゴリズムとは，

13）Preda Mihailescu（1955年生）はルーマニア生まれで，スイス・チューリヒで数学と情報科学を学んだ．現在はゲッチンゲン大学教授．

純粋に機械的な計算手続きであり，与えられた数もしくは数の有限列から，それらに関する情報を生成して，必ず停止するものである．例えば，小学校では，2つの数 n と k を与えて，それらの和 $n+k$ や積 $n\times k$ を出力として生成するアルゴリズムを学ぶ．与えられた2つの数を比較するアルゴリズムや，自然数をゼロ以外の自然数で割って，商と余りを求めるアルゴリズムもある．これらのアルゴリズムを結合すれば，与えられた数が3より小さいか，奇数か，2つの素数の和であるかといった性質をもつかどうかを判定するアルゴリズムが得られる．なぜなら，もし n が2つの素数の和であるなら，それらは共に n より小さくなければならないから，2より大きな偶数 n が2つの素数の和であるかどうかを調べるためには，n より小さい数の範囲で，足し合わせると n になるような2つの素数を探せばいいからだ．数 n が素数であるかどうかの判定も，計算によって決定できることである．つまり，n を数 $2, 3, \ldots, n-1$ で割って，各割り算の余りが0であるか否かをチェックすればいい．

アルゴリズムを使ってチェックできるような数の性質は，**計算可能**な性質と呼ばれる．（この概念については，第**3**章でさらに探究する．）すでに見たように，ゴールドバッハの予想は，計算可能な性質 P について，「すべての自然数が性質 P をもつ」という形の言明として定式化できる．これはゴールドバッハの予想の論理的に大変重要な特性だ．以下では，この形の言明を**ゴールドバッハ類の言明**と呼ぼう．（論理学では，もっといかめしい名称「Π^0_1 言明（パイ 0-1 言明)」で知られる．）じつは，この定式化では，重要なポイントが隠れてしまっている．性質 P は単に計算可能であるだけでなく，十分に単純な形式をもっていなければならない．つまり，数が性質 P をもつことを調べるアルゴリズムが，P の定義から読みだせることが必要である．この本で考えるゴールドバッハ類の言明の例は，すべてこの条件を満たしている．（算術の言語におけるゴールドバッハ類の言明の形式的定義は補遺で与える．）

ここでゴールドバッハ類の言明を次のような形の言明に拡張しておこう．

「自然数のどんな有限列 $k_1, ..., k_n$ も，性質 P をもつ.」ここで，性質 P は次の意味で計算可能である．数列 $k_1, ..., k_n$ が与えられたとき，それが性質 P をもつか否かを判定するアルゴリズムがある．

もし P が計算可能であるなら，not-P もそうである．すると，P が計算可能であれば，「性質 P をもつ自然数 k は存在しない」という形の言明はすべて，次のようなゴールドバッハ類の言明と同値になる．「すべての自然数 k が，性質 not-P をもつ.」

「すべての自然数が性質 P をもつ」という言明の**反例**は，性質 P をもたない自然数である．ある言明がゴールドバッハ類なら，それが偽のときには，非常に簡単に**反証**できる．それを反証するには，私たちはある数 n が実際に反例であることを示す計算を実行するだけで，その言明が偽であると結論できる．もちろん，もしもそのような計算がどうしても極端に長いものになるなら，ここでの「反証できる」は「原理的に反証できる」ことを意味するにすぎない．換言すれば，私たちは計算にかかる時間，スペース〔計算用紙の紙数など〕，そしてエネルギーの限界を無視する必要がある．いずれにしても，もしその言明が偽であるなら，それが偽であることは算術の基本規則の**論理的帰結**であり，それらの規則を用いたどんな長い計算も実行できるなら，それが偽だと示せるということである．つまり，算術の基本規則だけを用いてその言明が偽であることを示す証明が，数学的な意味で存在するということだ．ここで私たちは「計算」というものを，ある言明が真であることを示す数学的議論であるという意味で，特殊な証明と見なしておこう．論理学が研究対象とする**形式体系**は，数学的言明を証明したり，反証したりできるような公理的理論であるが，とくに不完全性定理は，算術の計算がそこで実行できるような形式体系についての定理である．形式体系については，**2.2** 節以降でさらに述べる．

上述のように，P が計算可能であれば，「すべての自然数が，性質 P をもつ」という形の言明は，もし偽であれば，反例を示し，計算を実行することで常に原理的には反証できる．さらに重要な事実は，反例が存在する

ときには，それを常に規則的に見つけだせることだ．そのためには，性質 P をもたない最小の数に到達するまで，0, 1, 2, 3, ……と順番に調べていけばよい．このように，ゴールドバッハ類の言明は，もしそれが偽であれば，その反証を（理論上）最終的には見つけだす規則的な手順がある．これは，次のような一般的な事実の特殊ケースでもある．どんな形式体系 S においても，ある言明 A が S で証明可能なら，規則的な検索によって，その証明を最終的に見つけることができる．ただし，もし言明 A が S で証明可能でないときは，規則的な検索は，一般に何も結果をださず，永久に止まらない．

だから，どんな形式体系 S についても，そこに多少の算術――計算を実行する基本的な規則――が組みこんでありさえすれば，偽であるようなゴールドバッハ類の言明は S で反証可能であると言える．他方，真であるようなゴールドバッハ類の言明がどのように証明できるかについては，同じようにすっきりとはいかない．すべての n に対して，各数 0, 1, . . . , n が性質 P をもつことは計算で確かめることができる．しかし，n をいかに大きくとっても，すべての数が性質 P をもつことの立証にはならない．もしゴールドバッハ類の言明が真であるなら，それが真であることが証明できると考えて当然だろう．しかし，その証明がどんな数学的方法を必要とするのかを前もって言うことはできないのだ．

「ディオファントス方程式 $D(x_1, . . . , x_n)=0$ が非負整数解をもたない」という形の言明は，すべてゴールドバッハ類の言明である．このとき，私たちの関心事は，数の組 $k_1, . . . , k_n$ が方程式 $D(x_1, . . . , x_n)=0$ の解ではないという性質であり，この性質を調べるには，掛け算，足し算と引き算の列を実行して，結果が 0 になるかどうかを見るだけでいい．

これと対照的に，双子素数予想は ゴールドバッハ類の言明ではない．双子素数予想を，「すべての自然数が性質 P をもつ」の形で表現してみると，自然数 n が性質 P をもつことは，n より大きい素数 p が存在して $p+2$ も素数であることになる．この場合，その性質から明らかに，ある数が

性質 P をもつか否かを判定するアルゴリズムを読みだすことができない．n より大きな素数 p と $p+2$ の対を規則的に探していく手続きは，そのようなペアがない場合には停止しないから，n がそのような性質をもたないという答えを与えることは決してできない．もちろん，もし双子素数予想が正しいなら，この手続きは実際，常に n がその性質をもつことを示すアルゴリズムになっている．しかし，この予想が正しいか間違っているかわからない限り，この手続きがアルゴリズムであるかどうかわからない．同じことは，コラッツ予想にも言える．コラッツ予想は，（任意の開始数から作られる）ある特別な数列が常に1に到達することを主張するが，任意の開始数からはじめた数列が最終的に1に到達するかどうかを判定する明確なアルゴリズムがない．つまり，これら2つの予想に関しては，偽であるときに反証できると主張する論理的根拠を私たちはもっていない．

算術的言明がゴールドバッハ類であるという性質は，不完全性の議論のさまざまな観点において，重要な役割を演じる．

2.2　第一不完全性定理

2.1 節においていくつかの例で示したように，初等算術の問題はしばしば簡単に記述できるけれども，それらの問題を解決するために必要な数学の難しさと複雑さには果てがない．例えば，129 ページの長さに及んだアンドリュー・ワイルズによるフェルマの定理の証明は，じつは「半安定の場合の楕円曲線についての谷山・志村予想」として知られるものの証明であって，それからフェルマの定理が導かれることは，それ以前に K.A. リベットによって示されていた．これがいったい何を意味しているかはここでとくに知る必要はない．要するに，フェルマの定理は初等数学の言語で簡単に述べられているけれど，非常に複雑な高等数学への回り道を使って証明されたということだ．

フェルマが，彼の予想に対する証明をもっているが，そのとき読んでいたディオファントスの本の余白には書ききれないと述べて以来，多くの人がその定理に対する初等的証明，つまりフェルマや彼の同時代人が知らないような数学をまったく使用しない証明を探し求め，また時には見つけたと誤解してきた．だが，フェルマがその定理の証明をもっていると考えたのは間違いであることはほぼ疑いない．ただし，フェルマの最終定理に対する既存の証明がどこまで単純化されうるかは未解決問題である．その証明から本質的に単純化された証明が抽出できるかどうかをなお調べる必要がある．（この定理に対する初等的証明が——純粋に理論的な意味で——存在することは，大筋で言って信じうる理由がある．そして，その証明はフェルマの本の余白にうまく収まらないばかりでなく，もしプリンタで印刷したら何千ページにもなるようなものだろう．）

フェルマの主張により提起された問題を数学者たちが最終的に解くまでに300年にわたる数学の発展を要したことや，ゴールドバッハやその他の算術の予想がまだ解決していない事実を見れば，数学者によって提出されるすべての算術の問題が，十分な時間と労力を与えることで必ず解決できる保証があるかどうか疑わしく思えるだろう．しかし，これができるという信念が，ドイツの数学者ダヴィット・ヒルベルト[14]によって，1900年パリの数学者国際会議における有名な演説で表明された．彼は，新世紀の数学者が立ち向かうべき23の重要な問題を提示して，次のように述べた．

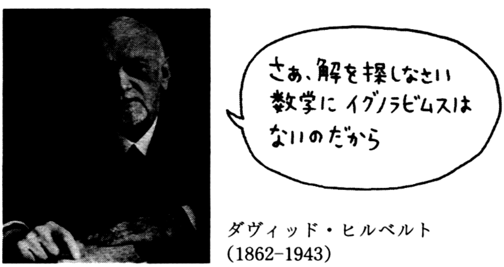
> 明確に記述された未解決の問題を任意に1つ選びたまえ．オイラー＝マスケローニ定数[15] C の非有理性の問題でも，2^n+1 の形の素数が無限個存在するかという問題でもよい．これらの問題がどんなに

14) David Hilbert (1862–1943) は，19世紀末から20世紀初頭にかけて数学全般で指導的な役割を担った．ゲッチンゲン大学で，多くの弟子を育てた．1920年代には，形式主義ないし証明論の旗印のもと数学基礎論のグループを率いた．

15) 調和級数 $\Sigma_{k=1}^{n} 1/k$ と対数関数 $\log(n)$ との差の極限．

取り組みがたく見えても，またそれらを前にして私たちがどんなに無力に思えるとしても，それにもかかわらず私たちは，純粋に論理的な有限のプロセスによって，その解が得られるに違いないという固い信念をもっている．（中略）すべての数学の問題が解決できるというこの信念は，研究する者の強い動機である．自分の中に絶え間のないかけ声が聞こえるのだ．“問題がある．さあ，解を探しなさい”と．あなたは，純粋な理性によってそれを見いだせる．なぜなら数学に“イグノラビムス”（*ignorabimus*, 永遠に知られないこと）はないから．

これは，ヒルベルトの楽天的な**ノン・イグノラビムス**の表明だった．ヒルベルトが暗に言及した古い格言「*ignoramus et ignorabimus*」（私たちは知らない，そしてずっと知ることはないだろう）は，1872 年に生理学者エミール・デュ・ボワ・レーモン[16]が，人の意識と物質世界に関する私たちの知識について話した際に言明したものである．



ダヴィッド・ヒルベルト
(1862–1943)

ゲーデルの第一不完全性定理は，決してこのヒルベルトの楽天的な見方を**否定するものではない**．この定理が立証したことは，ヒルベルトの楽天主義は彼の目論見通りには正当化しえないということである．つまり，す

16) Emil du Bois-Reymond (1818–1896) は，電気生理学の基礎を築いた．ベルリン大学教授，同学長．弟の Paul は数学者で，対角線論法の発明でも知られる．

べての数学の問題が解けるような単一の形式体系を提示するという目論見は，たとえ問題を算術の問題だけに限ったとしても，うまくいかないということだ．

第一不完全性定理（ゲーデル，ロッサー） ある程度の初等算術がその中で行えるような無矛盾な形式体系 S は，初等算術の言明について不完全である．つまり，S では証明も反証もされない初等算術の言明がある．

この定理の意味を理解するためには，まず「形式体系」の概念について考えておかなければならない．そのあと，「無矛盾性」の条件について，さらに「ある程度の算術」に関する条件について考える．

形式体系とは

形式体系とは，（形式的に定まった言語において表現された）**公理**と，**推論の法則**（**推論規則**とも呼ばれる）を与えて，それらから定理を導出するシステムのことである．**定理**は，その体系の言語で表現される文で，公理からはじめて，推論規則を繰り返して適用することで得られる．その体系における**証明**は，結論の定理を導くような公理と推論規則の有限列である．

この種の公理系の考え方は古くから数学にあるもので，一昔前はユークリッド幾何の勉強を通して多くの人によく知られていたものだ．ユークリッドは，『原論』で多くの**定義**を与えたが，その定義 1 は「点は部分をもたないものである」であった．さらに彼が導入したのは，幾何の基本原理である**公準**（最も有名なものに平行線の公準がある）と，一般的な推論法則の性質を述べた**共通概念**である．共通概念の例としては，「同じものと等し

い複数のものは，互いに等しい」がある．定義，公準，そして共通概念を使って，ユークリッドは多数の定理（**命題**）を導出している．

ユークリッドの定義，公準と共通概念は，形式体系にはなっていない．なぜなら，体系の言語が形式的に定まっていないし，その証明は公準で表されていない幾何的前提も用いているし，共通概念で表されていない他の論理原理も使っているからだ．（幾何学の形式的公理系は，20 世紀になってようやく得られた．）けれどもユークリッドの幾何学は，2 千年にわたって公理的方法論の原型であり，公理や定理，定理を導く推論規則を用いて知識を組織化するというアイデアは，哲学，科学，その他の学問領域に，非常に大きな影響を与えたと言える．しかしながら，公理的方法が知識の組織化と分析に著しく成功したのは数学だけである．

現代の論理学では，多くの具体的な形式的公理系が研究されているが，それらは大抵の場合 **1 階理論**と呼ばれるものになっている．ここで，「理論」という語は論理学の専門用語であって，日常用語あるいは科学用語として使う場合に付随するようなニュアンスをもたない．論理学で用いられる意味での「理論」は，公理的形式体系以外の何ものでもない．この本では，「理論」は「形式体系」の同意語として使われる．「1 階」というのは，定理を導くためのある特定の推論規則の集まりを意味していて，ゲーデルはこの 1 階理論に対して，完全性定理（これはじつに混乱を招く名前なのだが）を証明した．この定理については，2.3 節で説明する．

論理学においてとくに重要な 1 階理論は，初等算術の形式理論であるペアノ算術 PA と，選択公理を含むツェルメロ = フレンケルの集合論 ZFC の 2 つであり，どちらにも不完全性定理が適用できる．（なお，選択公理を含まない集合論は ZF という名称で表す．）本書はこれらの理論について研究するものではないが（PA の公理は 7.2 節で述べる），これらについておおまかな概観を捉えておくことは本書の議論の理解に役立つだろう．ここでは，次のことだけ知っておけばよい．まず，PA は，通常「初等的」と形容されるすべての算術的論証を遂行できる形式体系である．そして，ZFC は，

今日の数学のほとんどすべての定理を形式的に証明できるようなきわめて強力な体系である.

否定について

不完全性定理は，1 階理論以外でも多くの種類の形式体系に適用される．ただし，形式体系の言語は少なくとも**否定演算**を含んでいる必要がある．つまり，その言語のすべての文 A に対して否定文 not-A が存在することが前提となる．(ここで，「文」とはある種の言明を表す完結文のことで，その言明は証明されるとか，反証されるとかを議論できるようなものである.) これによって，「S が**無矛盾**である」(A と not-A の両方が定理になるような A はない) ことや，「文 A が S で**決定不能**である」(A と not-A のどちらも S の定理でない) ことを定義できるようになる．体系 S が**完全**である (「否定完全」とも呼ばれる) というのは，その言語で表される文で，S で決定不能になるものがひとつもないことを言い，それ以外の場合は，体系 S は**不完全**であると言う.

ここで 1 つ記法を導入しておく必要がある．いま A を S の言語の文として，S の公理に A を新しい公理として加えて得られる形式体系 (ただし推論規則は変えない) を，私たちは $S+A$ と表記する．もし A が S で証明可能であるなら，$S+A$ は S と同じ定理をもつ (A は公理として不要である) が，他方，もし A が S で証明可能でないなら，$S+A$ はより「強い」理論で，とくに A を証明する.

論理学の専門用語が日常の用法とは若干異なる使われ方をする点に注意が必要だ．$S+A$ の公理である A が，$S+A$ で証明可能であるというのを読者は奇妙に思うかもしれない．日常のインフォーマルな文脈では，公理は証明可能でなく，証明されない基本前提であるというのが，しばしば当然と思われている．しかし論理学では，「証明可能」という概念は何らかの理論を前提にして初めて意味をもち，理論 S のすべての公理は S で「証

明可能」でもある．公理 A の証明は，「A が公理である」と述べた自明な一行だ．数学では，通常，公理が証明可能であるという言い方はしないが，ある言明が公理から「直ちに」あるいは「自明に」従うとは言う．例えば，「すべての n に対して，$n+0=n$」という公理から $0+0=0$ は直ちに従う．論理学では，公理と，公理の直接の帰結の間にこのような細かい区別はなく，どちらも「証明可能」である．

こうして，否定，証明可能性，無矛盾性，そして決定不能性の間にある，いくつかの基本的な関連について考えることができるようになった．ひとつめの関連は，矛盾した理論は決定不能な言明をもたないという事実である．なぜなら矛盾した理論では，その理論の言語におけるすべての言明が証明可能だからだ．これは，論理学で伝統的に *ex falso quodlibet*（偽りからは何でも生じる）という名で知られている推論の法則による．（本当のところ，「矛盾からは何でも生じる」と言うべきである．）

2つめの関連性は，次の事実に見られる．

A が S で証明可能であることと，S + not-A が矛盾することは同値である．したがって，A が S で決定不能であることは，$S+A$ と S + not-A が両方とも無矛盾であることと同値である．

この事実は，以降の議論でもひんぱんに用いられる．これは，A と not-not-A が論理的に同値であるという法則に依存しているが，不完全性定理はこの法則が成り立たない体系にも適用可能である．さらに，上の事実を立証するには，次のことを用いる．理論 $T+A$ における言明 E の証明は，T において仮定 A から結論 E を導く議論，つまり T における「A ならば E」の証明であると見なせ[17]，逆に，「A ならば E」が理論 T の定理であれば，T に A を公理として加えた理論において E は定理である[18]．ここで E

17）　一般に，「演繹定理」として知られる事実．

を論理的な矛盾（「C かつ not-C」の形の言明）とおき，二重否定の除去をもちいれば，先の事実が導ける．

基本事項のまとめ

〔定義〕

理論 S が**無矛盾**である ⟺ A と not-A が両方 S の定理になる A はない

文 A が S で**決定不能** ⟺ A も not-A も S の定理でない

理論 S が（**否定**）**完全** ⟺ どんな A も S で決定可能（決定不能でない）

〔基本事実〕

A が S で証明可能 ⟺ S + not-A は矛盾

T で「A ならば E」が証明可能 ⟺ $T+A$ で E が証明可能

形式体系と計算可能性理論

不完全性定理は，私たちの数学的知識の一部を定式化する PA や ZF のような体系だけではなく，「ある程度の算術」が遂行できる限りは，その公理が私たちの数学的知識の一部を表すか否かにかかわらず，広範囲の形式体系に適用される．たとえ公理が偽であっても，あるいは何ら解釈を伴わないようなものであってもよい．

日常の慣行では，偽となる公理や，まったく解釈を伴わない公理について語ることは，きっと奇妙なことだろう．しかしながら論理学で形式体系について一般的に語るとき，「公理」という語は，何らかの意味で基本的でそれ以上単純な原則に還元できないような言明とか，真であると信じうるか，でなくても容認はできるような言明だけに用いられると考えてはならない．そうではなくて，論理学における公理の一般的な概念は形式体系

18）　前件肯定（Modus Pones）．アリストテレスの弟子テオプラストスの仮言的三段論法をもとに6世紀の思想家ボエティウスが考案したとされる．

と厳密に結びついたもので，形式言語のどんな文 A も形式体系の「公理」として選ぶことができるのだ．

形式体系についてのこの非常に一般的な概念は，計算可能性の理論と深く関連している．というのは，このような状況で公理と推論規則からなる体系を概念づけようとすれば，“公理を認識したり規則を適用することが，機械的な手続きでできる”という条件を課す必要があるからである．そもそも規則の適用が正しいかどうか，あるいはある言明が公理になっているかどうかを判定するために，さらに何か数学的な問題を解かなければならないようでは困るからだ．もしそうなってしまうと，何かが第一の体系において確かに証明になっていることを証明するために，別の公理と推論規則をもった第二の体系を導入する必要があるだろう．以上から，形式体系においては，何が公理であるとか推論規則の適用が正しいとかを確かめるために，さらなる数学的な推論を用いる必要がなく，計算機によってなされるような機械的チェックを遂行するだけでよいというのが前提条件である．

ゲーデルの定理の一般向けの説明では，（公理に関する）この類の条件は，形式体系が有限個の公理をもつという形でしばしば述べられる．これは，（原理的に）有限の目録を調べることによって公理であることが確認できることを意味する．けれども，PA や ZF のような，論理学でよく研究されている形式体系の多くがこの条件を満たしていない．これらの体系は無限個の公理をもっているのだ．それでも，特定の文が公理であるかどうかを調べるのは，機械的作業の話である．例えば，PA には，「数学的帰納法による証明」として知られている推論規則が，次のような形の無限個の公理として組みこまれている．「0 が性質 P をもち，かつ，n が性質 P をもつときは必ず $n+1$ も性質 P をもつならば，すべての数が性質 P をもつ．」性質 P の可能な選択肢は無限にあるが，私たちはこの原理の個別例を簡単に確認できる．無限個の公理をもつ理論の他の例は，のちほど **5.4** 節で取り上げる．その理論では上述の PA の場合とは違って，公理は単に一般

図式の個別例の集まりではない．

このように，形式体系を概念づけるにあたっては，機械的な計算可能性の一般概念を用いる必要があり，それは 1930 年代におけるチューリングや他の人たちの仕事によって理論的に整備されたものである．計算可能性の概念は，前にはゴールドバッハ類の言明との関連で，数に関する性質として導入したが，それは形式言語における文や，文の有限列に対しても同様に適用できる．計算可能性の概念と，形式体系や不完全性定理との関係は，第 3 章でもっと系統的に扱うことになる．

無矛盾性とは

第一不完全性定理の（ゲーデルの結果をロッサーが強めた）上述の形では，体系 S がある程度の算術を含むことの他に無矛盾であることだけが仮定されている．無矛盾性は，理論に課する条件としてほとんど最弱のものであるから，この定理の主張は適応性が広く，かなり強力な結果だといえる．実際，うそつきの名人がときどきうそをついてすっかり人を惑わせるように，算術の無矛盾な理論は，部分的に偽って（数学上の）作り話をすることができるのだ．

例えば，ZFC で，算術的言明 A が証明されることを私たちが知っているとしょう．それによって，A が真か偽かの問題が解決していると結論できるだろうか？　たとえ ZFC の公理全般について疑いをもっていたとしても，その証明を点検したうえで，それに説得力を見いだせれば，その問題は解決されたと見なせるだろう．また，理論全体に信頼がもてれば，ZFC での証明が存在することを知っただけでも，その問題が解決したと認められる．しかし，ZFC の無矛盾を信じるだけでは，ZFC での証明可能性から A が真だとすることは，一般的に正当化できないのである．

ただし基本的な算術を含む無矛盾な体系 S において，もしそこで証明できるならば，真であることが保証される言明のクラスもある．例えば，

Aをゴールドバッハ類の言明であるとしよう．この場合は，もしAがそのような体系Sで証明可能なら，実際に真であることがわかる．なぜなら，もしAが偽なら，そのことは計算による反例で示すことができるので，Aの否定がSで証明可能になり，Sが無矛盾であるとすれば，AがSで証明可能になるはずがない．だから，例えば，フェルマの定理が真であると結論するためには，それがZFCで証明可能であり，かつZFCが無矛盾であることを知っていれば十分である．けれども，ゴールドバッハ類でない言明の場合，例えば双子素数予想に関しては，もし基本的な算術を含んでいる無矛盾な理論において証明可能か不可能かだけがわかったとしても，予想の真偽については一般に何も結論することはできない．

不完全性定理によって，私たちは偽の定理を証明する無矛盾な理論の具体例を得ることができる．これは，第二不完全性定理を使って，きわめて簡単に例示できる．いまZFCが無矛盾だとすれば，ZFCの無矛盾性はZFC自身で証明可能でないから，ZFC＋「ZFCが矛盾している」も無矛盾であり，この理論は，真なるゴールドバッハ類の言明「ZFCが無矛盾である」を反証する．（この言明が実際にゴールドバッハ類であることは**2.6**節で説明する.）

論理学では，理論の**健全性**に関していくつかの異なる性質を扱う．算術の話をするとき，無矛盾性は最弱の健全性であり，他方，理論の最も強い健全性は，その理論から導かれる算術的定理がすべて実際に真であるという性質である．中間的な健全性の中でとくに重要なものは，真であるゴールドバッハ類の言明を反証しないという性質である．論理学の文献で，この性質は**1無矛盾**とか**Σ健全性**とか呼ばれるが，この本では後者のほうを用いている．（なぜそのように呼ばれるかは，補遺で説明する.）ゲーデルが彼の定理の記述の中で用いたω無矛盾性は，Σ健全性を含意し，それよりも真に強い性質である．

偽であるゴールドバッハ類の言明は，基本的な算術を含む任意の理論において反証されるので，そのような理論においてあるゴールドバッハ類の

言明が**決定不能**であれば（その理論は決定不能な命題をもつから当然無矛盾である），その言明は真ということになる．だから，ゴールドバッハの予想がPAで決定不能であるという証明があれば，それは同時に予想の証明になるのだ．そんなことは無理だなんていうことはない．決定不能性の証明は，ZFCのようなもっと強い理論でもできてしまうかもしれないのだ．あるいはゴールドバッハの予想自身を決定しないで，「もしゴールドバッハの予想が真であるなら，それはZFCで証明不可能である」といった仮定的言明が証明できることだって考えられる．実際，言明それ自体を証明も反証もせずに，上記のような仮定的言明が証明できる例がゴールドバッハ類の言明に存在する．それは第二不完全性定理から直ちに従う．たとえSが無矛盾であるかどうかわからないとしても，私たちは仮定的言明「もしSが無矛盾であるなら，Sの無矛盾性はSで証明できない」は証明できるのである．

「ある程度の算術」とは何か

第一不完全性定理は，「ある程度の算術」がそこで行えるような形式体系に適用される．これが何を意味するかについて，もう少し明確にしておく必要がある．

その言語が初等算術の言語を含み，そしてその定理が自然数についての基本事実を含んでいるような体系は，明らかに「ある程度の算術」の条件を満たすものである．（算術の「基本事実」の集まりがどんなものかは，補遺に具体的に明記されている．）しかし，自然数についての明示的な言明をもたず，その代わりに自然数を表現するのに使える数学的な対象を扱う体系にも，不完全性定理は応用できる．例えば，記号列や特定の有限集合は，そのような数表現に使うことができる．ある種の数学的対象が別の種類の対象を表すという概念は，のちほど第二不完全性定理と関連して，さらに詳しく解説する．ここでは，第一不完全性定理を応用する形式体系を，その構成

部分に算術を含むもの，つまり算術の言語が使えて，自然数の加算と乗算についての基本性質が成り立っているものと考えても，本質は何も失わないことに注意したい．本当は体系によっては，その中で算術の言語を使うには翻訳のような手続きがいるかもしれないのだが，その言語には初等算術の言語が含まれていると考えても基本的に構わない．

「ある程度の算術」という条件の本質は，それが“どの程度”かを具体的に示さなくても述べられる．ゴールドバッハ類の言明が何であるかを議論した際，（「2つの素数の和である」というような）ある自然数の性質が機械的計算によってチェックできるなら，数 n がその性質をもつときには，n がその性質をもつことの初等数学的な証明があるということを述べた．第一不完全性定理を証明するために形式体系 S が含む必要のある「ある程度の算術」とは，正にこのことを実証するために必要な程度の算術である．もう一度言い直せば，「ある程度の算術」が S で遂行できるということは，いくら長々しくなろうとも機械的計算によって確証できる算術的言明は，すべて S で証明できるということである．

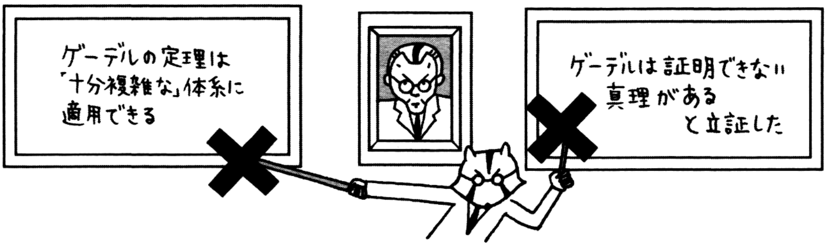
不完全性定理は，「十分複雑な」体系に適用できると，しばしば述べられているが，これは正しくない．なぜなら，ある程度の算術を含むという条件は，形式的意味でも非形式的意味でも複雑さに依拠するものではなく，何が体系で表現されるかもしくは証明されるかによって決まるものだからだ．不完全性定理が適用できる非常に単純な体系もあるし，適用できない非常に複雑な体系もある．複雑さと不完全性の間の関係については，第**8**章でさらに考察する．

複雑さが関連するという誤った考えは，数学の外での不完全性定理の応用もどきによく見られる．次の文章は，リチャード・ギャロッドの「ポストモダニズムと伝統的な写真術の未来」からの引用である．

> 20世紀の初頭，数学者ゲーデルが確立したことは，十分複雑な体系において（複雑といってもよちよち歩きの幼児でも到達できる文法

レベル)，その体系の完全な記述は不可能だということである．最も単純な写真も，写真であれば，その複雑さは測り切れないので，その創造的な可能性は事実上無限大であり，そして将来もずっとそうであろう．

ゲーデルの定理を意味のあいまいな不完全性や複雑性といい加減に結びつけるこのようなコメントは，ゲーデルの定理への多くの言及の典型である．最も単純な写真の複雑さが測り切れないのは不思議ではない．しかしゲーデルは，体系が「十分複雑である」なら「体系の完全な記述」が不可能であることなど決して証明してはいない．この引用文では，どうも写真が「体系」と見なされているらしい．しかし，それが何を意図するものにせよ，じつのところこの著者は，写真が算術の言明を証明するとは考えていないことは明白に思われる．これはゲーデルの定理への他の多くの言及と同じように，定理の実際の内容には触れず，どちらかと言えば，類推や比喩として，あるいはインスピレーションの総合的な源泉として，定理に言及しているのだ．



2.3 第一不完全性定理の限界

「証明できない真理」がある？

“ゲーデルは証明できない真理があることを立証した”とよく言われる

が，これは正しくない．なぜなら，不完全性定理のどこにも，絶対的な意味で「証明できない」という内容は述べられていないからである．不完全性定理の文脈で用いられる「証明できない」とは，“特定の形式体系では証明できない”ということだ．特定の形式体系 S で証明できないどんな言明 A についても，それが証明可能である形式体系が他に存在することは明らかである．端的に言えば，それ自身が公理であるような理論 $S+A$ では，A は証明可能である．

A が真であることを示す意図でそれが証明できるかどうかを問題にするなら，A が $S+A$ で証明可能であるという自明な事実はもちろん何の役にも立たない．ゲーデルの定理が「証明できない真理」の存在を示しているという考えは，どれほど妥当性があるかはともかく，おおむね次のような観察事実から導かれている．つまり，数学的に見て正しい公理と推論規則からなる形式体系で，普通の算術的定理をすべて導くのに十分であるようなものが存在している．例えば，ZFC は非常に強い理論で，その中で現代数学における算術的定理はすべて証明できるように思える．そうだとすれば，（ZFC が無矛盾であるとすれば）ZFC が算術的言明に関して不完全であることは，私たち人間数学者には数学的に真理を立証する方法がないという意味で，証明できない算術の真理があることを導くのではないか？

ZFC と同じ妥当性をもったまま，数学的論証の正しい原理を表現するために用いられるもっと強い公理集合へと ZFC を拡張する方法を私たちが知らなかったとしたら，この結論はたぶん正しいと言ってよいだろう．けれども実際には，ZFC をそのように拡張する方法があるのだ（**5.4** 節と **8.3** 節を参照）．

したがって，不完全性定理のどこを見ても，「絶対的な意味で証明できない，真なる算術的言明がある」ことを示してはいない．それでも，もしある算術的言明が ZFC で証明不可能なら，それが今日の「普通の」数学的な方法と公理（例えば，数学の教科書に載っているようなもの）を使っては証明できないと考える正当な理由にはなるし，大多数の数学者が問題のな

い確実な方法と今日見なしているやり方では証明できないと考える根拠にもなる.

完全な形式体系もある

不完全性定理は，あらゆる無矛盾な形式体系が不完全であることを意味するものではない．それどころか，完全で無矛盾な形式体系もたくさんある．数学的な立場でとくに興味ある例は，「実数の初等理論」である．(別の例として，プレスバーガー算術として知られている理論について，第7章で述べる．) この理論の言語は，算術の言語と同様で，数の加算と乗算について語ることができる．しかし，今度は自然数でなく実数に関するものである．実数は整数，すべての有理数 m/n (ただし，m, n は整数)，さらに2の平方根や円周率 π のような無理数を含む.

この言語における言明の例として，次のようなものがある．これは1984年のカナダの数学オリンピックの問題である.

> 7つの異なった実数をどのようにとっても，その中に2数 x, y が存在して，$x-y$ を $1+xy$ で割った商は，0より大きく，3の平方根より小さくなる.

もう一つ別の言明をあげると，

> 等式 $x^3+bx^2+cx+d=0$ が2つの異なる実解をもつための必要十分条件は，$3c-b^2$ が0より小さく，かつ $4c^3-b^2c^2-18bcd-4b^3d+27d^2$ が0以下になることである.

実数の完全な理論は，このような種類の言明を証明する．上の例からも明らかなように，この理論は取るに足りないようなものでは決してなく，

それは電子工学，計算幾何学，最適化理論，その他の分野で，多数の応用をもっている.

自然数全体は実数の部分集合を構成するので，自然数の理論が不完全であるのに，実数の理論が完全になることは奇妙に思われるかもしれない. けれども，自然数の理論の不完全性が実数の理論に転移するわけではない. というのは，すべての自然数が実数であっても，私たちは実数の理論の言語だけを使って自然数全体を実数の部分集合として定義できないからだ. それゆえ，この理論の言語で表現できない算術的言明がある. 例えば実数の理論では，「0より大きな自然数 m, n, k が存在して，$m^3+n^3=k^3$ である」という言明は表現することができないのだ. 他方，「0より大きな実数 r, s, t が存在して，$r^3+s^3=t^3$ である」という言明なら実数の理論で表現できるし，そしてこれを簡単に証明することもできる.

ふつう私たちはどのようにして自然数を実数の部分集合として定義しているだろうか？ 実数0と1は，対応する自然数と同一視でき，そして実数の加算を使って，自然数全体は，0, 1, 1＋1, 1＋1＋1 などからなる実数の部分集合として認知することができる. しかしながら，この「などからなる」は，実数の理論の言語で表現できないのだ. 自然数の定義を定式化するもうひとつの方法は，自然数は，次の条件を満たすすべての実数集合 A に属する実数とするものである. 実数集合 A は，0を含んでいて，1を足す操作の下で閉じている，すなわち x が A に属するときは必ず $x+1$ も A に属するという条件である. この定義は，実数の集合に言及することが可能な**2階の言語**を使っている. 実数の初等理論〔1階理論と同義〕の言語は，初等算術の言語と同様に，数について述べることが可能なだけで，数の集合について言及することはできない.

完全性定理の「完全」とは

ゲーデルが論理学において最初に行った主要な仕事は，1階述語論理が

完全であることの証明である．この定理は厄介なことに，述語論理が不完全性定理の言う意味で「完全」な形式体系であると言わんとするかに見える．そこで，次のようなコメントがしばしば現れる．

> 1階述語論理は，ゲーデルの不完全性定理に屈するにはまだ十分強力でない体系である．実際，ゲーデル自身はそれが無矛盾で完全であることを証明した．

> ゲーデルは，1階述語論理が完全であることの証明（1930）にも功績がある．不完全性の証明は，算術の真理を表現するのに十分強い形式体系だけに当てはまる．

これらの見解は，広く行き渡っている単純な誤解に基づくもので，それを招いた原因は論理学で「完全」が2つの異なった意味で使われることにある．述語論理が完全であると言うとき，それは形式体系がゲーデルの不完全性定理の意味で「完全」であるという意味ではない．後者は，別の言葉で「否定完全」とも呼ばれ，完全性定理の文脈における完全性は，それとは意味合いが異なる．つまり，述語論理が完全だというのは，述語論理に用いられる推論法則は，1階言語における公理の集合から論理的な帰結を得るために十分であるという意味である．それで，ゲーデルの初期の仕事について，なるべく誤解を生じさせない言い方をするなら，こうなる．

ゲーデルは多くの形式体系が否定完全でないことを証明し，他方で1階論理の推論規則は論理演繹として完璧であることを証明した．

完全性定理と，それがゲーデルの不完全性定理の意味における不完全性に対してもたらした結果については，さらに第7章で述べる．

決定不能な非算術的言明の存在について

算術的でないような言明も含む形式体系 S にはもちろん，決定不能な非算術的言明がたくさん存在している可能性がある．しかし，不完全性定理が示すことは，S がその算術の部分で不完全になること，つまり S で決定できない算術的言明があることだ．さらに，不完全性定理の証明について十分な精査を行えば，S の仕様から，S で決定できないような特定のゴールドバッハ類の算術的言明を具体的に作り出せるのである．

このように，不完全性定理は，ある程度の基本算術を含むどんな形式体系についても，それがすべての算術的言明を決定しないという不完全性を具体的に指摘している．他方残念ながら，不完全性定理の数学外への応用については，次のように言わざるをえない．不完全性定理からは，非算術的あるいは非数学的言明に関して形式体系が完全か不完全性かについては何も知識を得られない．

前に述べた本来の定理に比べて弱い第一不完全性定理の定式化として，次のようなものがある．

> ある程度の算術を含むいかなる形式体系においても，その体系の言語の言明で，そこで決定不能なものが存在する．

この弱い定式化は，強い形よりもある意味でもっと魅力的にも見える．というのは，“天体物理学やゴースト理論も，若干の算術を含んでいれば，天体物理やゴーストについての全容を語ることができない”〔ゴースト＝死者の霊〕といった連想が得られるからだ．けれども，そのような連想は正当化できない．ゲーデルの不完全性定理の知識を仮定しても，ある無矛盾な形式体系は，天体物理について，ゴーストと天使について，人間精神について，物理的宇宙について，あるいは過去と未来の時間経過についての言明に関しては完全であるかもしれない．不完全性定理は，ただ体系が算術

の部分で完全になりえないと言っているにすぎないのだ．

数学外での不完全性定理の応用もどきは，基本算術を含むという本質的な条件をしばしば無視して，この定理が形式体系一般についての定理であるような間違った定式化をおこなっている．また，この条件を考慮に入れていても，なお次のように主張する書き手もいる．「私たちの前提では，宇宙は少なくとも算術程度には大きく，だから不完全性による影響を受けている」「哲学は算術を包含すべきで，そうでなければ初めから哲学は制限されていることになる」などなど．最初の文の意味は明確でないが，2番目のものは，算術の言明を判定できない哲学なら，人生や宇宙の完全なガイドにはなりえないということで，哲学体系へ批判にもならない批判を述べようとしたものだろう．これについては，第**4**章でさらに論評する．

2.4 第一不完全性定理と数学的真理

真理と決定不能性

本書では，「文（sentence）」と「言明（statement）」という用語は互いに置き換え可能な使い方をしている．もっとも，導入された概念の純粋に構文的な性質を強調するためには，とくに「文」がよく使われる．純粋に構文的な概念とは，言語の意味や解釈，あるいは言語における言明の真偽に言及せず，文や証明を構成する形式規則についてだけ言及するものである．例えば，体系 S が不完全であることは，S の言語の文 A があって，A も not-A も S で証明可能でないという意味だ．不完全性のこのような理解では，S の言語の文に対する真偽のような概念を仮定せずに，ある種の規則によって組み立てられた記号列（体系の文）と，ある形式的規則の適用でつなげられた文の列（体系の証明）についてだけ言及する．

不完全性定理のよくある一般向けの説明は，定理が適用される体系 S については，“S の言語における真なる言明で，S では決定不能なものが

存在する”というものである．もしSの言語の文を真か偽かの言明を表すものと解釈するなら，これは確かに不完全性定理の結論になる．というのは，AがSで決定不能なら，not-Aも同じであり，そしてAかnot-Aかの一方は真だからだ．けれども，たとえSの文を単なる記号列と見なし，真かどうかを問う意味のある言明を表わしていると見なさなくても，不完全性定理は適用される．例えば，哲学的な理由からZFCの言語の文は一般に真や偽を表現しないと考える人たちがいるが，そうだとしても不完全性定理がZFCに当てはまらないことにはならない．

でも，次のことは強調しておく必要がある．不完全性定理を形式体系に適用するための条件は「ある程度の算術」を含むことだから，私たちが不完全性定理を体系Sに適用するときはいつも，算術の言明を表わすような（したがって真か偽かに解釈できるような）Sの文の少なくとも部分集合が，特定できるはずである．（ただし補遺でも説明するように，体系の提示者はこれらの文に対して，まったく異なる解釈を意図しているかもしれない．）この部分集合が，Sの算術部分を構成するものである．とくに，言明の真偽の話は体系の言語のすべての文について拡張させないで，体系の算術部分だけで語ることができる．つまり，不完全性定理が適用できるどんな形式体系の算術部分の言明に対しても真偽について語ることができる．とすれば，不完全性定理が正に確立したことは，その体系の言語で表された真なる算術的言明で，その体系で証明できないものがあることであり，これは前にも述べた通りだ．しかしながら，ある具体的な決定不能な言明Aについて，Aかnot-Aのどちらが真であるかを判定できるかは別の問題である．これについては，第一不完全性定理のゲーデルの証明についての討論と併せて，2.7節で考察する．

「真である」ことについての哲学的疑念

形式体系Sでの決定不能な言明の真偽についてこうした考察を行うた

めには，そもそも算術的言明の真偽が合理的に説明できることが前提となるはずだ．しかし，不完全性定理に関する議論でよくあるのは，例えばPA において決定不能なある算術命題が“真である”と言うと，その意味が不明瞭だと見なされることである．実際，双子素数予想は真であってもPA では決定不能かもしれないという考察から，何か得られるだろうか？双子素数予想が真かもしれないというのだから，それは何か他の理論で証明できるのだろうか？ もしそうなら，その理論は何か？ あるいは形式的証明なしでも，どうにかして双子素数予想の真理を認識することが可能かもしれないという意味か？ それとも，私たちは真理の形而上学的概念，例えば数学的な実在と一致するという意味での真理性に救いを求めるのか？

多くの哲学的謎は伝統的に真理の観点から述べられているので，この疑問は自然なものである．そして，「算術的言明が真であるとはどういう意味か？」といった問いは，ほとんど自動的に私たちを哲学的な議論と思索の領域に導くものと考えられる．それゆえ，通常このような議論と思索を伝染病のように避ける数学者たちは，非数学的文脈で数学を論じるときには，「真である」を括弧（スケアクォート）に入れてしまうか，あるいはまったくこの語を避ける傾向がある．

他方，数学的な文脈では，数学者たちは簡単に真理について語る．「もし一般化されたリーマンの予想が真であるなら……」「ゴールドバッハの予想が真であると信じる強い根拠がある……」「もし双子素数予想が真であるなら，無限に多くの反例が……」．このような文脈で，ある算術的言明が真であるという仮定は，なんらかの形式体系で証明されるというような仮定ではなく，あるいは「真であると理解する」ことができるという仮定でもなく，ましてや疑わしい形而上学を前提にした仮定ではない．そうではなくて，“ゴールドバッハの予想が真である”という仮定は，“2より大きなすべての偶数は2つの素数の和である”という仮定とまったく違わない．同様に，“双子素数予想が真である”という仮定は，“$p+2$ が

素数になるような素数 p が無限個ある”という仮定以外の何ものでもない．つまり，「双子素数予想が真である」は，双子素数予想の内容を正確に別の言い方で述べているだけである．それは数学的言明であって，何かがわかるとか証明できるとかいうことに関する言明ではないし，さらに言語と数学的な実在についての関係ではまったくない．

同様に，真である算術命題が PA で決定不能であることを語るとき，私たちは厄介な哲学的な概念をもちだしていると考える必要はない．双子素数予想が真であっても，PA で決定不能かもしれないということは，ただ単に，$p+2$ が素数になるような素数 p が無限個あるということが事実であっても，これは PA で決定不能だということを意味するだけである．「ディオファントス方程式 $D(x_1, . . . , x_n)=0$ が解をもたない」という形のある真な言明が，PA で決定不能であると述べることは，純粋に数学的な陳述をしているわけで，数学の真理についての哲学的に厄介な問題は何ももちこまない．（この純粋に数学的な言明は，ひとつの数学の定理でもあり，第 **3** 章でマティヤシェヴィッチ＝ロビンソン＝デイビス＝パットナム定理との関連においてまた説明する．）

無矛盾な体系やそれによる問題の解決に関しても，同様の注意が当てはまる．ある無矛盾な体系が，例えば，無限に多くの双子素数の存在を証明するという事実だけでは，決して双子素数予想が真であることを意味しないことはすでに強調した．そのような考察もまた，厄介な形而上学的観念を含んでいるとよく思われている．だが，ここには形而上学はまったく含まれておらず，ただ普通の数学があるのみだ．PA の拡大となる無矛盾な理論のなかには，偽の数学的言明を証明するものがあることを私たちは知っている.(19)（私たちがこの事実を知っているのは，これがそれ自身ひとつの数学的な定理だからである．）そうすると，「PA が無矛盾である」と「PA が双子素数仮説を証明する」という 2 つの仮定からは，双子素数予想が真であ

19）PA＋“PA は矛盾している”は，第二不完全性定理により無矛盾と考えられる（p. 74 参照）.

ること，つまり無限個の双子素数が存在することを結論する数学的根拠はないことになる．

このような「真である」の使用は，理論を形成する公理にまで適用されることに注意してほしい．「真である」が哲学的な意味で使われるなら，理論の公理が真であるというのはおかしいと，ふつうは考えられている．それら公理は出発点であり，後からの議論で「真である」が意味するものを決めるもとになるものだからだ．このような哲学的な概念はいずれも，上で説明した「真である」という語の数学的用法とは無関係である．本書では終始，数学的言明について真偽を語るときにはあくまで数学的用語として使用する．例えば，PA の公理「すべての n に対して，$n+0=n$ である」が真だというのは，ただすべての自然数 n に対して，$n+0=n$ であることだけを意味する．この場合，実際には，私たちは公理が真であることを知っている．なぜ，どうやって，これを知るのか．規約によるのか，検査によるのか，直観によるのか．こういう問いは，「真である」という語のこの使用における意味とは無関係である．

以前の説明で，例えば，本書の「真である」の使用においてゴールドバッハの予想が真であるというのは，2 より大きなすべての偶数が 2 つの素数の和になる，というのと同じであると強調した．つまり，このような場合の「真である」の使用は，その予想の記述を繰り返す必要をなくすための単なる便法なのだ．けれども，「真である」は，「PA のすべての定理が真である」というときのように，他の使い方でも議論に用いられる．「PA のすべての定理が真である」という言明から「真である」という語を消去して，PA の無限個の定理をすべて網羅した 1 つの言明に置き換えることはできない．にもかかわらず，「PA のすべての定理が真である」というのは数学的な言明であって，何かが証明されるとか，真だと理解されるということについての言明ではないし，さらにまた数学的実在についての哲学的言明でもないことは確かである．アルフレッド・タルスキ[(20)]は，1930 年代に，真理を数学的にどう定義するかを示した．それによると，与えら

れた A について，「A が真である」という言明は，A 自身と数学的に同値になる．その形式的な詳細はこの本では説明しないが，この議論は，初等算術の場合には「真である」にそのような数学的定義を与えうることを前提としている．

「S で真である」という不可解な意見

不完全性定理の一般向けの解説に含まれる「真である」のかなり共通した使用法は，次の例に示される．

> ゲーデルは，少なくとも算術の公理と同じくらい豊かな公理の集合には，その公理の集合において真であるが，その公理の集合を使うことによっては証明できない言明が存在することを証明した．

また，コロンビア百科辞典は次のように記述している．

> クルト・ゲーデルが1930年代に示した不完全性定理は，ある体系の公理から導出できない無限に多くの命題が，それでもその体系内で「真」の値をもつことを立証するものである．

ここで，「公理の集合において真である」や「体系内で真」は，明らかに，「公理の集合から証明可能である」や「体系内で証明可能」を意味してはいない．しかし，論理学には「公理の集合において真である」という概念はないので，それが何を意味しているかというのは疑問である．ひとつの可能な解釈は，上記の記述をわかりやすくはするが，正しくなくする

20) Alfred Tarski (1901–1983) は，ポーランドのワルシャワで生まれ育ち，第二次大戦直前にアメリカに移住した．カリフォルニア大学バークレー校にモデル理論を中心とするロジックの新拠点を築いた．

もので，1階論理の完全性と関連させて，第7章で考察する．しかし，多くの場合，「公理の集合において真である」や「体系内で真」という言い方が使われるときは，これによって書き手が意味するのは，言明が形式的に証明できないにもかかわらず，体系の利用者は何らかの方法で命題の真理を確信できるということであろう．そのような場合，どんな体系に注目しているかによって，その中で真だが証明できない具体的な命題を私たちが知っていたり知らなかったりすることが，なおざりにできない事実となる．なかでも，ゲーデルの証明で示される決定不能文が真であるかどうかの考えを，私たちはもっているかもしれないし，もっていないかもしれないのだ．これについては，2.7節でさらに検討しよう．

これと関連した不完全性定理の誤解は，定理が決定不能というときの次のような説明にも見られる．「もし体系が無矛盾なら，その中に真であるが，証明不可能な定理がある．」体系 S のすべての定理は S で証明可能である．「S の定理である」ことの意味は「S で言明可能である」ことに他ならないからだ．同様に奇妙な言い回しは，次のような主張に見られる．

> ゲーデルの不完全性定理は，すべての数学的体系において，証明も反証もされない公理があることを述べている．

これまで強調してきたように，体系のすべての公理はその体系において自明に証明可能である．

残念ながら，「証明できない定理」というフレーズの特殊な使用例が，論理学の中にも存在していることに注意しておこう．アメリカの論理学者（そして音楽の教授），ハーヴィー・フリードマン(21)は以下のように説明する．

21）Harvey Friedman (1948年生)．現在アメリカで最も有名な数理論理学者の一人．18歳でMITの博士号を取得し，すぐにスタンフォード大学の助教授に採用された（ギネス記録）．現在はオハイオ州立大学で数学と音楽の教授．

> 証明不可能な定理というのは，数学で一般に受け入れられている公理（ツェルメロ＝フレンケルの集合論＋選択公理）を使っては証明できないが，巨大基数として知られる高度の無限を使うことで証明できる数学的結果である．巨大基数公理は，新しい公理を求めてゲーデルがはじめた重要な研究課題であった．

この誤解を招きやすい言葉遣いは，もちろん，どんな体系 S についても，S で証明できない S の定理があることを意味しているわけではない．巨大基数公理については第 **8** 章で解説するが，そこでこの公理の使用に関するフリードマンの研究の方針についても簡単に説明する．

2.5 第一不完全性定理とヒルベルトのノン・イグノラビムス

不完全性定理により，たとえ ZFC でも，（その無矛盾性を仮定すれば）あらゆる算術的言明をすべて決定することはできないことがわかっている．例えば，双子素数予想が実際 ZFC で決定不能になることがありうるだろうか？　それは論理的には可能だが，それを支持する根拠は何もない．数学的な文脈で，つまり論理学とか数学基礎論や数理哲学という特別な領域の外で，数学者の心に浮かんだ算術の予想や問題が，ZFC で決定不能であると証明されたことは一度もない．だから，ヒルベルトの「ノン・イグノラビムス」の楽天的精神で自然な数学の問題に挑戦する数学者は，ZFC の中で解決できない問題があるかもしれないということで，不安を感じる必要はまったくない．

上記の「算術の予想や問題が……ない」という言い方に注意されたい．算術ではなくて**集合論**における問題を考えるなら，ヒルベルトの 23 個の未解決数学問題リストの筆頭にある問題，つまり「カントールの連続体仮説」として知られる集合論の予想を証明もしくは反証することは，（ZFC

が無矛盾であれば）ZFC で解決できないことが知られている．この問題が ZFC で解決できないことは，不完全性定理の助けを借りずに，1938 年にゲーデルが，1963 年にポール・コーエン[22]がそれぞれ導入した集合論的な方法論を用いて証明された．ZFC には「普通の」数学における方法論はすべて取りこめると考えられているので，これが意味することは，連続体仮説を証明するか反証するためには，新しい数学の公理あるいは推論の原理を導入しなければならないということである．

そのような公理や原理を発見したり，提案したりすることは，ふつう数学の活動の一部にはならないので，一般の数学者が，ZFC で解決できないと知られた問題をもはや数学の問題ではないと見なす傾向があることは理解できる．同様に，もし双子素数仮説が ZFC で決定不能であることが証明されたとしたら（それは，きわめてセンセーショナルである），その真偽の問題は，それによって「ふつうの」数学とは異なる数学の次元に入っていくだろう．

しかし，ふつうの数学活動の一部になっていなくても，数学で認められる公理や推論規則の拡張は，これまでもあったし，またいまも断続的に探求されている．だから，ヒルベルト流の楽天主義者が，次のような見解をもつのはもっともなことだ．つまり，

> あらゆる算術の問題をその中で解決する単一の形式体系を定めることは不可能であっても，新しい公理や推論規則による数学の拡張が限りなく続いていくなかで，どんな算術の問題もいずれどこかで決定されるという可能性は排除されていない．

これは，実際ゲーデルの見解であり，前に述べた通り，現代の数学を拡張

22） Paul Cohen (1934–2007) は，アメリカの数学者・論理学者．スタンフォード大学教授．「強制法」と呼ばれる証明技術を開発して，連続体仮説の独立性を証明し，集合論の発展に大きく貢献した．

する手段として，彼は「巨大基数公理」を提案した．

2.6 第二不完全性定理

この定理をややインフォーマルに述べれば，以下のようになる．

第二不完全性定理（ゲーデル） ある程度の初等算術が実行できる無矛盾な形式体系 S では，S の無矛盾性は S の中で証明できない．

この場合の「ある程度の算術」は，第一不完全性定理における「ある程度」と同じではないことをまず注意しておきたい．この点については，第二不完全性定理の証明と関連させて，後ほど詳しく説明しよう．

第二不完全性定理の定式化は，「S が無矛盾である」という言明が少なくとも S の言語においてちゃんと表現されることを前提にしている．そうでなければ，S の無矛盾性が S で証明できないことが分かっても何の意味もないからだ．（例えば，算術の理論で馬の足が 4 本であることを証明できないことが分かっても意味がないのと同じである．）ある形式体系では文字列を扱い，さまざまな形式的言語（自分自身の言語も含む）における文や証明を直接記述することが可能であり，実際私たちはそのような形式体系 S を作りだすこともできる．しかしながら，第二不完全性定理が S に要求するのは，第一不完全性定理の場合と同じく，算術の構成要素をもっていることだけである．したがってそこでは，文や証明を数で表し，文や証明についての言明を，対応する数についての算術的言明として表現するような何らかの方法が前提となっている．これは**構文論の算術化**として知られているもので，ゲーデルが不完全性定理の証明の中で最初に行ったものである．（文や証明のような）構文的な対象を数として表す方法は，**ゲーデル数化**と呼ばれる．不完全性定理の形式的扱いで最も面倒な部分は，ゲーデル

数を定義して，「n が，ゲーデル数 m の文の S での証明のゲーデル数である」ことが，算術の言語で定義できるのを示すところだ．どんな文や文の列のゲーデル数も機械的に計算できる必要があり，また，構文的な対象の計算可能な性質は，ゲーデル数の計算可能な性質に対応することが必要になる．

ゲーデル数化の詳細は単に技術的な事柄だからこの本では扱わないが，ゲーデル数の一例は第 **3** 章で与える．ゲーデル数化の導入によって，（S 自身を含む）諸形式体系の文や証明についての言明（と解釈できるもの）を，体系 S の算術部分が含むようにできることは，本書では大凡自明のこととしてある．

「解釈できる」という概念は，少し注意を要する．例えば，Con_S について考えてみよう．これは，「S が無矛盾である」ことを算術の言語に解釈したものだ．すなわち，Con_S は，以下のようにして得られる算術的言明である．まず，S の言語に対してゲーデル数化を導入し，「S の言語における任意の文 A について，A と not-A の両方に対する証明が S に存在することはない」という言明を算術の言語で表現する．しかし，もし初等的算術の言語における文として本当に書き下したら，Con_S はものすごく長いものになり，提示されても意味をとるのは不可能だろう．算術的言明 Con_S は，普通の算術の立場ではまったく興味を惹かないものだが，数と構文的対象（文や文の列）の間の慣習的関係によって，「それが算術の言明として真である」ことと，「S が無矛盾である」ことが同値であることを私たちは認識している．私たちはこの文 Con_S をふつうの数学言語を用いた推論の中で言及するのであり，私たちの推論を定式化するためにこの文を利用するのではない．同じことは，ゲーデル数を用いて形式体系についての言明を算術の言語に翻訳する場合にも言える．

類似の状況は，例えば，コンピュータ・ゲームの中で，音や映像を表現するのに２進データを使うことにも見いだせる．ゲーム中の出来事は，ゲームのある状況を表しているビット（0と1）の巨大な集まりが数学的変

換によって生じる結果である．これらの変換は，純粋に数学的な用語で記述できるけれども，私たちに意味をなし興味が起きるのは，ビット・パターンと特定の音や映像の間に慣習的関係があるからで，私たちがこれらビットの集まりについて話すのも音と映像の言葉によってだけだ．

つぎに，算数で使われる日常的な例を見よう．数と記号列の関係についてのものだ．私たちは「365」のような10進数の文字列を使って，数を示している．数字列「365」と数365の間の関係は慣習的なもので，記号列を数に規則的に解釈する特定の方法によって得られる．私たちは，純粋に構文的な言葉で記述される記号列の上でさまざまな操作を実行する．例えば，数字列の最後にもうひとつ「0」を置くという操作を考える．純粋に記号処理の言葉で記述されるものの，この操作の興味は，数字列と数の関係において，これが数を10倍することに対応している事実にある．つまり，数に関する言明や操作が，記号列に関する言明や操作として表現されるのである．したがって，私たちはふだん「逆ゲーデル数化」を行っているのだ．

形式的に定義可能な対象（数，集合，記号列，ビット・パターン）についての言明を，別の種類の対象についての言明として翻訳するアイデアは，ゲーデルよりずっと前からあちこちにあったもので，形式論理以外でもさまざまな状況で使われていた．しかし，ゲーデルはこのアイデアを構文論の算術化にうまく用いて，形式体系の研究に新しい活路を見いだしたのである．

Con_S の証明

形式体系 S が矛盾するとは，その体系に，ある文 A に関する2つの証明があって，ひとつは A を証明し，もうひとつは not-A を証明することだ．S における証明のゲーデル数であるという性質は，計算可能でなければならないので，「S が無矛盾である」ことは，次のようにゴールドバッハ類

の言明として定式化することができる．「n が S における A の証明のゲーデル数であり，同じ文 A について m が S における not-A の証明のゲーデル数であるような数 m, n は存在しない．」このことから，もし Con_S が偽であるなら，計算によって偽であることが示されるはずだが，もし真であるとしても，与えられている数学的方法と原理の集まりを使っただけでは，証明できるか，できないかわからない．第二不完全性定理が述べることは，もし Con_S が真であるなら，体系 S に含まれている方法と原理だけを使って，Con_S が真であると証明することはできないというものである．もちろん，Con_S は他のある形式体系では証明可能である．しかし，私たちが数学的に妥当であると認める体系で，証明可能かどうかはわからない．

第二不完全性定理に関するよくある誤解は，例えば次のカドバニーの例［Kadvany 89, P. 165］に見られる．不完全性定理のポストモダニズム的な含意について，この著者は以下のように述べている．

> ゲーデルの第二不完全性定理が含意することは，『プリンキピア』の無矛盾性は，それが正しいはずだと無条件に仮定することによってのみ数学的に証明できるということ（これが，数学者たちが暗黙のうちに実行していること）である．そうでなければ『プリンキピア』の無矛盾性をもっと強い体系のそれに還元するほかはないが，そうすると無限の退行がはじまる．

第二不完全性定理は，体系 S の無矛盾性が S より強い体系でしか証明できないとは主張していない．ただし，S より強い体系というのは，S が証明するものすべて（とそれ以外）を証明する体系を意味するものとする．しかし，この定理は，S の無矛盾性が S 自身では証明できないことを主張しているだけである．もし S の無矛盾性が，S より強い体系だけでしか証明されないとすれば，これは妙な話である．というのは，S が無矛盾であ

るというのは，ただ矛盾を証明しないというだけであって，多くの偽なる言明を証明しても，なおかつ無矛盾かもしれないのだ．だから，Sが無矛盾であることを証明するのは，Sが算術の定理の源として一般に信頼できることを証明するのとは違うし，Sの無矛盾性証明が，S自身の推論の方法を前提としなければならない理由もない．実際，例えば，ゲアハルト・ゲンツェン[(23)]がPAの無矛盾性に対する証明を行った体系は，ある観点ではPAの拡張になっているが，別のさまざまな点においてはそれよりずっと制限された体系なのである．

じつのところ，無矛盾な理論Sに対する無矛盾性の証明が行える理論S'は，ゴールドバッハ類の言明についてはSで証明可能な言明のすべてとそれ以上を証明する．もしS'がSの無矛盾性を証明するなら，Con_SはS'のゴールドバッハ類の定理だが，これはSで証明可能でない．他方，Sのゴールドバッハ類の定理はすべてS'でも証明可能である．（なぜなら，無矛盾な理論の任意のゴールドバッハ類の定理が真である事実は，S'で証明可能だからである[(24)]．）

もし私たちが理論の無矛盾性を証明しようとしたら，第二不完全性定理は無限後退を引き起こすという意見がよく述べられる．私たちの公理や原理を別の公理や原理の上に正当化させ続けようとすれば無限後退に陥ることは古代から知り尽くされているから，このような考えをいまさら持ちだすのは不可思議である．例えば，理論Sにおいて，PAの無矛盾性証明を行うとしよう．なぜこの証明に納得するのか？　PAの無矛盾性に対する

23） Gerhard Gentzen（1909–1945）は，ドイツの数学者．ゲッチンゲン大学でおもにベルナイスに師事．学位取得（1934）後は，ヒルベルトの助手を経て，プラハ大学に職を得たが，ドイツ降伏により同地で投獄され，獄中で餓死．

24） **2.1**節と**2.2**節で説明されているように，偽であるゴールドバッハ類の言明は反証できる．したがって，偽であるゴールドバッハ類の言明が，無矛盾な理論で証明されることはない．対偶を考えれば，無矛盾な理論のゴールドバッハ類の定理は真でなければならず，この議論はある程度の算術を含む体系S'の上で形式化できる．さらに，ある言明がSで証明可能であるという文はゴールドバッハ類の否定であるから，真であれば証明される．つまり，Sの定理は，それが定理であることがS'で立証でき，さらにその定理がゴールドバッハ類であれば（真であることが）S'で証明できる．

Sでの証明を納得するには，Sに対する無矛盾性証明が必要であるというなら，まさに私たちは無限後退への道にある．けれども，“ある形式体系における証明を，別の形式体系における証明を基にしてしか納得できない”ということが言いたいだけなら，ゲーデルをもちだす必要はない．どこかの時点で，なにがしかのインフォーマルな手段を用いてしか，私たちの公理と，したがって私たちの証明を正当化しえなくなるわけだ．それは，直観的明瞭さや説得力に基づくのかもしれないし，あるいは実用性や実行成果，あるいは伝統に訴えるのかもしれないが，いずれにせよ正当化のために思いつく何らかの根拠に訴えることになる．

いま，PA の無矛盾性が PA 自身で現に証明可能であったとしてみよう．そのような証明は，PA が実際に無矛盾であることの証明として何か価値があるのだろうか？　あるとはいえない．PA におけるこの特別な証明に私たちが納得する理由があるのか？　結局のところ，もし PA の無矛盾性が疑わしいなら，PA で与えられた無矛盾性証明の正当性も同じように疑わしいではないか——少なくともその証明を理解しないうちは．しかし，こんな抜け道がある．私たちは，PA における PA の無矛盾性証明を確かなものと考えてもよい．というのは，たとえ PA 全体の無矛盾性については疑いがかかるにしても，その無矛盾性証明が使っている PA の小さい一部分は疑いなく無矛盾であるからだ．これがじつは，ダヴィット・ヒルベルトの一般的なアプローチだった．

第二不完全性定理とヒルベルトのプログラム

第二不完全性定理は，数学の基礎に関してダヴィット・ヒルベルトが提案したアイデアに対して深遠な結論をもたらした．ヒルベルトは，**有限の立場**[25]による論証で，数学の無矛盾性を証明する目論見をもっていた．彼が

25） 有限の立場（finitism）では，有限の記号列を機械的な操作で変換するような最も基本的で具体的な数学的な推論だけが認められる．

望んだことは，無限集合の数学を含めて，普通の数学のすべてがその中で実行できるような形式体系を定式化すること，そして最も基本的で具体的な数学的な推論だけを使ってこれらの体系の無矛盾性を証明することだった．この意味で，ヒルベルトは彼の無矛盾性証明がまったく疑いの余地のないものになることを意図した．例えばZFCの無矛盾性が，それなしでは科学や数学がまったくできないような基本的論証だけを使って証明されることを意図した．

ヒルベルトは有限の立場でどんな方法が許されるのかを公式には明らかにしなかったけれども，ヒルベルトが心に思い描いた方法はPAのような算術の体系で形式化できることは明白だろう．そして，もしPAがそれ自身の無矛盾性を証明することができないなら，初等算術の無矛盾性さえ有限の立場では証明できないので，ヒルベルトのプログラムは実現されない．（したがって，その当時，ヒルベルトの学生であり協力者であったヴィルヘルム・アッケルマン[(26)]によってすでに達成されたとヒルベルトが思っていた有限の立場における算術の無矛盾性証明は，正しいはずがなく，実際に間違いであることがのちにわかった．）

不完全性定理がヒルベルトのプログラムを破壊したというふうによく言われるが，しかしこれはゲーデル自身の見解ではなかった．正確に言えば，満足のいく無矛盾性証明を実現するためには手段を拡張しなければならないことを示したのだ．ゲーデル自身が1940年代の初めに開発し，そして1958年に『ダイアレクティカ』誌で発表したいわゆる「ダイアレクティカ解釈」は，有限的論証の概念を拡張するひとつの方法を与えるものだった．

ヒルベルトのプログラムは，数学の意味や内容についての特定の諸概念，そして“数学の正当化”が何を意味するかということに基づいていた．したがって，もし私たちがヒルベルトの基本的なアイデアを共有しないなら，

26) Wilhelm Ackermann (1892–1962) はヒルベルトの門弟で共著書もある．アッケルマン関数の考案と，無矛盾性証明の研究で知られる．ギムナジウム教師．

無矛盾性証明はそれだけでは一つの数学の理論を正当化するにはとうてい不十分である．例えば，ある無矛盾な理論において双子素数予想が証明できることは，無限に多くの双子素数があることを保証しないからである．第二不完全性定理からこの数十年に引きだされた非数学的結論の数々がはっきりとヒルベルトの見解に基づいていたためしはまずないが，それらの結論が表しがちな懐疑主義は明らかにヒルベルトと類似のアイデアから影響を受けている．このような結論については，第 **5** 章で詳しく説明する．

2.7 不完全性定理の証明

第一不完全性定理は，ふつうの意味の数学の定理ではないと考えられることがある．例えば，

> この定理は形式的な数学体系の中で書き表されるが，非形式的な数学の推論を使って証明されるだけである．その証明を形式化する方法はなく，ただ英語のような自然言語で述べられるだけである．
>
> もうひとつの困難は，ゲーデルの証明が本当の証明であるか否かである．不完全性を証明するためには，その論理式を解釈して，その内容が真であることを理解しなければならない．すなわち，この結果は形式的推論によっては達成されず，体系外でなされるメタ推論によって得られる．それゆえ，それは「形式的」証明ではない．論理式の真理を見分けるためには洞察を必要とする．

ゲーデルの定理が普通の数学的な証明をもたないというこの考えは，第一不完全性定理のゲーデルのオリジナルな証明に対するある種の誤解に基づいているように思える．その誤解とは，ゲーデルの証明が，任意の無矛

盾な体系 S に対して，そこで証明できない算術的言明 G が存在することを示しただけでなく，G が真であることも示したというものだ．万一そうであれば，これはゲーデルの証明を本当に驚くべきものにするだろうけれど，実際にはそのようなことは決して示していない．ゲーデルの証明が示したことは，「S が無矛盾であれば，G は真である」ということである．もし S が無矛盾であることを証明できるなら，そしてそれは場合によっては可能なのだが，そのときには G が真であることも証明できる．他方，S が無矛盾かどうかわからなくても，ゲーデルの証明は依然として成り立つのだが，そのときは G が真であるかどうかも分からないのである．どちらにしても，G の真偽の問題は，ゲーデルの証明だけでは決定できない．

実際のところ，ゲーデルの定理の証明については，普通の数学の証明とくらべてより非形式的あるいは直観的であるようなところは何もない．不完全性定理はかなり弱い数学的な理論においても，形式的に証明される――PA なら十分すぎるくらいだ．つまり，ゲーデルの証明は PA やそれより強い理論に適用されるが，そのような理論において証明できない数学的言明を真であると立証することはない．

ゲーデルの証明

不完全性定理に対するゲーデルのオリジナルな証明は，形式体系一般についての定理としては定式化されていない．なぜなら，計算可能性の一般理論，そしてそれを用いた形式体系の一般概念は，1930 年にはまだ生まれていなかったからである．代わりに，ゲーデルは，彼が P と呼ぶ特定の形式体系について定理を証明した．ただし証明で用いられている P の性質を列挙し，そしてこれらの性質が形式体系の広範なクラスによって共有されることを指摘した．結局書かれなかった論文の第 2 部で，彼はこの定理を一般化するつもりだった．1930 年代の間に，計算可能性の一般概念の導入にともなって明らかになってきたことは，ゲーデルのあげた条

件を満たす形式体系すべてに本質的に同じ証明が確かに適用でき，さらにまた，これらの条件は，ある程度の算術が実行できるすべての形式体系によって満たされていることである．

不完全性定理の証明において，ゲーデルは算術文のさまざまな性質に対する**証明可能な不動点**を定義する技法を導入し，それはその後論理学で広く使われることになった．この技法は，構文論の算術化を仮定する．体系 S の言語における文のゲーデル数に関する何らかの性質 P が，算術で定義されているとしよう．例えば，P は「S の言語におけるゴールドバッハ類の文のゲーデル数である」という性質，あるいは「S の公理のゲーデル数である」という性質，あるいは「S の定理のゲーデル数である」という性質などである．ここで，性質 P は算術の言語でそれ自身定義可能であると仮定される必要があるが，いまあげた例はそうなっている．性質 P に対する証明可能な不動点というのは，次を満たす算術文 A のことである．すなわち，S，もしくは S より弱い体系において，ある数 m について以下が証明できる．

A は，数 m が性質 P をもつことと同値である．

ここで m は A 自身のゲーデル数にほかならない．つまり，A が成り立つのは，そのゲーデル数が性質 P をもつ場合で，その場合に限ることが，S で証明可能である．

算術の言語で定義可能なすべての性質 P に対して，証明可能な不動点があることはとうてい自明ではない．ゲーデルは，「自らが性質 P をもつ」と述べる言明を算術に翻訳することによって，このような不動点の存在を確立した．このために，彼が用いた不動点構成法は，普通の（それほど普通でもないが）言葉で説明すれば以下のようになる．

「x における「x」を引用 x で置換した結果が，性質 P をもつ」における「x」を引用「x における「x」を引用 x で置換した結果が，性

> 質 P をもつ」で置換した結果は，性質 P をもつ.

この奇妙な言い回しの文は，特定の代入操作を行った結果[27]が性質 P をもつと述べている．そして，実際にその特定の操作を行うと，その結果は正しくその文自身になることがわかる．したがって，その文は，ある記述を満たす文は性質 P をもつと述べていて，かつそれ自身がその記述を満たすただ一つの文なので，その意味で，その文は「自らが性質 P をもつ」と述べるのである．置換の操作が，ゲーデル数上の操作として，算術の言葉で定義できることを示すことによって，ゲーデルは上記の文の算術的表現 A を得た．いま m を A のゲーデル数とすれば，A は「m が性質 P をもつ」ことと同値であることが PA で証明可能である.

自己言及文を構文的操作によって構成する方法は，その後もいろいろ定式化されている．例えば，アメリカの論理学者で哲学者の W.V.O. クワイン[28]は「クワイン化（quining)」として知られている方法を発明した〔*The ways of paradox*（1961)〕.

> 「は，自分自身の引用のあとに置いたときに，性質 P をもつ文を生じる」は，自分自身の引用のあとに置いたときに，性質 P をもつ文を生じる[29].

一般の不動点構成法は，種々の結果を証明するために論理学で広く使われている．ゲーデルは，それを「S の定理ではない」という性質に応用することで，第一不完全性定理を証明した．S の**ゲーデル文**と呼ばれるものは，そのような一般の不動点構成法から得られる文 G のことであり，n

27) x の最初の出現と 3 番目の出現に対して，引用が代入される．カッコの深さの対応に注意.
28) Willard Van Orman Quine (1908–2000) は，ハーバード大学の哲学教授．新興の記号論理学に対する哲学的考察で多数の本・論文を書き，多くの弟子を育てた.
29) 「x」は，自分自身の引用の後に置くと「x」x を生じる．上の文においてこの操作を実行すると，結果は自分自身になる．そして，上の文の主張はその操作結果が性質 P をもつ文になることだから，「自らが性質 P をもつ」と述べていることになる.

を G のゲーデル数とすれば，

G は，「n が S の定理のゲーデル数でない」と同値である．

が S で証明される．

最初に，G がゴールドバッハ類の言明として定式化されることを注意しておこう．文 G は，どんな数 p も，S における G の証明のゲーデル数ではないという言明と同値であり，また形式体系とゲーデル数化に関してふつうの要件が満たされていれば，そのような数 p の性質は計算可能である．

さて，ゲーデルの証明における論法は次の通りである．最初に，もし G が S の定理であるとしたら，G が S の定理であるという事実（すなわち，G のゲーデル数 n が S の定理のゲーデル数であること）は S で立証可能である．その理由は，S の定理であることは，S における証明を提示することによって実証される性質であり，そして S における証明であることは文の列の計算可能な性質でなければならないから，そのことの立証は S の中で実行可能になる．よって，もし G が S の定理であるなら，このことは S で証明可能である．しかし，G は S の定理でないという性質に対する証明可能な不動点であるから，G の否定も S で証明可能になり，よって S は矛盾する．

したがって，もし S が無矛盾なら，G は S で証明可能ではない．私たちは同じように S の無矛盾を仮定して，G が S で反証できないことも結論できるだろうか？　否である．というのも，第二不完全性定理によって，ある無矛盾な理論 S が存在して，それは自分自身が矛盾することを証明し，したがってすべての言明が S で証明可能であることも証明する[30]（とくに，「G は G が S で証明できない」という言明と同値だから，G が偽であることを証明する）．しかし，もし S が無矛盾なら，G は真である（なぜなら S で証明可

30） 例えば，$S = \mathrm{PA} + \text{not-Con}_{\mathrm{PA}}$ と置くと，not-Con_S も S で証明可能である．

能でないから）．そして，G がゴールドバッハ類の文でもあることから，S が Σ 健全，つまり真なるゴールドバッハ類の文を反証しないと仮定するなら，not-G は S で証明可能でないということになる．これはゲーデルの第一不完全性定理のオリジナルな主張よりは若干強い結果をもたらす．というのは，ゲーデルのオリジナルな仮定は ω 無矛盾であり，それは S が真なるゴールドバッハ類の文を反証しないという上記の仮定を含んでいて，かつそれより強い仮定だからである．

ロッサー文

ロッサーは，不完全性定理の主張を強めるために，**ロッサー文** R を導入した．それは，単に S で証明できないというよりも少し複雑な性質に対する不動点として構成される．具体的に言えば，R は次の文と同値であることが PA で証明できる．

任意の n に対して，n が R の証明のゲーデル数であれば，$m < n$ が存在して，m は not-R の証明のゲーデル数である．

R もゴールドバッハ類の言明であり，さらに，S が無矛盾であるという前提だけから，R は S で決定不能になるが，それを確かめるのは，興味ある読者に任せる．以下においては，これをただ事実として了解していればよい．

タルスキの定理

不動点構成法を用いると，「真なる算術文のゲーデル数である」という性質は算術の言語では定義できないことが示せる．なぜなら，もしこの性質が算術で定義できるとしたら，真なる算術文のゲーデル数ではないとい

う性質に対する不動点 A が構成できて，以下の性質をもつ．すなわち，「A が真なる算術文であること」と，「A のゲーデル数が真なる算術文のゲーデル数でないこと」と同値になる．古くから知られている「うそつきのパラドックス」の一形式に行き着くわけだ．すなわち，真であることと，真でないことが同値になるような算術的言明 A が構成される．「真なる算術文である」という性質が算術の言語で定義できないという結果は通常「タルスキの定理」と呼ばれているが，じつはゲーデルは不完全性定理を発見するための途中ステップとしてこの結果を先に得ていた．

真なる算術文であるという性質は算術で定義できないけれど，真なるゴールドバッハ類の文であるという性質は定義できるし，また他にも限定された種類の算術文であれば同様なことが言える．すると，例えば，私たちは算術文 A を定義して，それが真であることと，それが真であるゴールドバッハ類の文ではないこととが同値であるようにすることができる．しかし，このことが逆理をもたらすことはない．なぜなら，いまの場合 A はじつはゴールドバッハ類の文ではなく，したがって確かに真であるからだ．

ゲーデル自身も，不完全性定理の彼の証明が次の意味でうそつきのパラドックスと関係があると述べている．うそつき文は，「自分自身が真ではない」という文 L である．したがって「真である」という言葉のふつうの使用に従えば，L が真であるのは，それが真でないときと一致するということで，論理的な矛盾に陥っているようにみえる．ゲーデルの証明は，これに当たる算術文として，「真である」を「S で証明可能である」に置き換えたものを用いている．うそつきのパラドックスは，「真である」ことの意味や，そして意味ある内容を表現する文の要件は何かという問題について，はてしない論争をもたらしたが，それに対して，ゲーデル文はひとつの算術文であって，同じ論理形式（ゴールドバッハ類の言明）の他の算術文と同じように問題なく意味をもつものだ．

ゲーデルのオリジナルな証明は，決して第一不完全性定理の唯一の証明

ではない．他のいくつかの証明についてはあとで簡単に解説する．けれども，まずは〔ゲーデルの証明を特徴付ける〕自己言及についていくつか注意を与えておく．ここは読み飛ばしてもよい．

どこまで「自己言及的」か？

第一不完全性定理のゲーデルの証明と，ロッサーによって強められた主張は，共に不動点構成法の使用が鍵となっている．これに関して，不動点構成法によって得られた文が「自己言及的」であるとするのは問題があるという意見もある．なぜなら，（彼らの主張によれば）この構成法で得られた文 A について言えるのは，m を A のゲーデル数として，

A は，数 m が性質 P をもつことと同値である

が証明できることだけだからである．つまり，G や R のような文はある特定の性質に対する不動点にすぎず，それらは「自己言及的」ではないという指摘だ．

しかしながら，これも正確ではない．確かにゲーデルの証明は，ゲーデル文 G が「S で証明できない」という性質に対する不動点であるという事実だけを使っている．しかし，すべての算術的性質 P が証明可能な不動点をもつということの証明の中で構成される文は，もう少し強い意味の自己言及性をもつ．つまり，それは，次の形の文 A である：

性質 P と性質 Q をもつような m が存在する．

ここで，性質 P をもつ唯一の数は文 A 自身のゲーデル数であることが PA で証明可能である．文 A は「自分自身が性質 Q をもつ」と述べるというのは，この意味である．

証明可能な不動点は，「S で証明可能でない」という性質に対するゲーデル文以外にもある．例えば，（第二不完全性定理による）「S が無矛盾であ

る」を形式化した文 Con_S がそうである．Con_S が真であることと，それが S で証明可能でないこととは同値であることが，S で証明可能だから，Con_S は実のところ「S で証明可能ではない」という性質に対する不動点になっている．しかし，Con_S は一見すると自己言及的ではまったくないし，Con_S は「自分自身が S で証明可能でない」と述べているとは誰も言わないだろう．

算術的言明の自己言及性については，この説明だけではまだ問題の全容を語りつくしてはいない．通常「自己言及」とは自らに言及する文という意味ではなくて，発話者が自らに言及するという意味である．まずいくつかの事例を見てみることにしよう．ジョンが「ジョンはあなたを愛する」と言ったとする．これが，自己言及のケースかどうかは，発話者の意図による．彼は自分を第三者のように言及しているのかもしれない（例えば，TV コメディ『となりのサインフェルド』でジョージ・コスタンザが「ジョージは怒るぞ」というようなときである[31]）．あるいは，ジョンという名の別人について述べているのかもしれない．他方，もし夫ジョンが「あなたの夫はあなたを愛している」と自分の妻に向かって言ったなら，彼の言明は彼の意図とは独立に自己言及的である．たとえ彼が記憶喪失で，彼女の夫なる人物について知りえた知識に基づいてこの言明を発したとしても，ジョンはこの女性の唯一の夫であり，したがってこの言明は，ジョンが自分の妻を愛するとき，そのときに限り真であるという意味で，自己言及的である．

算術の言語における自己言及的言明に関しては，文自体が何を意図するかといった問題はまずないが，それでも上の自己言及と類似した 2 つの面が発見できる．代入操作などの使用は，上で述べた自己言及の 2 番目の例（「あなたの夫」を使う例）に対応する．他方，最初の例（「ジョン」を使う例）は，以下のような形だけのゲーデル数化の選択に対応している．ま

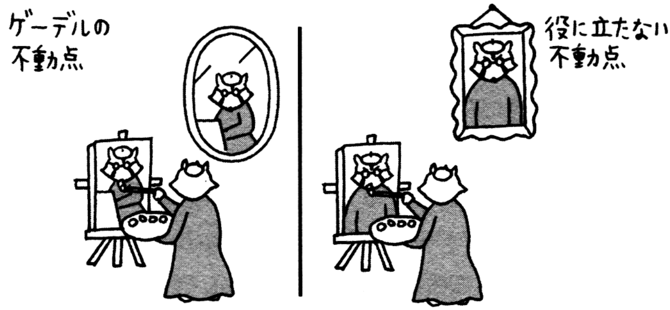
31）『となりのサインフェルド』は，ニューヨークを舞台にした 1990 年代の人気 TV コメディ．俳優ジェーソン・アレクサンダー演じるコスタンザは，冴えない風采に虚言癖もあるが，憎めないキャラクターで，主人公サインフェルドの長年の親友．

ず，言明 A を次のものと定める：

0 は性質 Q をもつ．

それから，A のゲーデル数が 0 になるようなゲーデル数化を導入する．このようなゲーデル数化の導入にはまったく問題がないはずだ．というのは，ゲーデル数化は，たんなる約束事にすぎず，計算可能な構文的性質がゲーデル数の計算可能な性質に対応づけられれば何でもよいからである．すると，言明 A が，このゲーデル数化のもとで，性質 Q に対する証明可能な不動点になるのは当たり前である．実際，上述の意味で，A は「自分自身が性質 Q をもつ」と述べる．それは，「性質 P と性質 Q をもつような m が存在する」という形をしていて，文 A 自身のゲーデル数は，性質 P をもつ唯一の数（すなわち，0 に一致する数）である．

しかし，自己言及のこの例には，何か腑に落ちないところがある．このやり方で，どうしてゲーデルの証明の簡易版が得られないのか？　その理由は，最初に性質 Q を選んで，それから Q に依存したゲーデル数化を行っているからである．「S の定理ではない」という性質に対して証明可能な不動点を得るためには，この論法は応用できない．というのは，当該の性質がゲーデル数化の方法の選択に依存してしまうからである．この小手先の論法で，「自分自身が性質 Q をもつ」と述べる言明を作っても，その性質 Q は，この場合，その文のゲーデル数についての無意味で偶然選ばれた性質にすぎない．G や R が自己言及的であるのと同じような意味で自己言及的である言明は，「性質 P と性質 Q をもつような m が存在する」という形をしていて，なおかつその言明自身のゲーデル数は性質 P をもつ唯一の数であるというだけではない．それに加えて，P と Q はそれらの言明の構文的性質を同一のゲーデル数化によって算術に翻訳したものなのである．



計算可能性理論を用いた第一不完全性定理の証明

第一不完全性定理のゲーデルの証明とロッサーの強化版は，この定理が S の言語における自己言及的な言明をつくることによってのみ証明されるという印象を多くの人に与えた．いやそればかりか，初等算術では決定不能とわかるのは奇妙な自己言及命題しかないと誤解されたようだ．

このような印象を打ち消すには，第一不完全性定理の別種の証明を紹介するだけでよいだろう．ひとつの議論は次の通りである．すでに何度か述べたように，マティヤシェヴィッチ＝ロビンソン＝デイビス＝パットナム定理によって，任意に与えたディオファントス方程式 $D(x_1, ..., x_n) = 0$ が解をもつかどうかを判定するアルゴリズムは存在しない．そうだとすれば，「ディオファントス方程式 $D(x_1, ..., x_n) = 0$ が1つ以上の解をもつ」という形のすべての言明を正しく判定するような理論はありえない．もしそのような理論 S があったらとしたら，方程式 $D(x_1, ..., x_n) = 0$ を任意に与えたときに，私たちは「方程式 $D(x_1, ..., x_n) = 0$ が1つ以上の解をもつ」という言明もしくはその否定に対する S における証明を規則的に検索することにより，それが解をもつか否かを判定するアルゴリズムが得られてしまうからである．だから，S が「方程式 $D(x_1, ..., x_n) = 0$

が１つ以上の解をもつ」という形をした何らかの偽な言明を証明しない限り，この形の言明で S で決定不能なものが存在していなければならないことになる．

この議論の２つの特徴に注目したい．まず，それはゲーデルのオリジナルな証明と同じように，真なるゴールドバッハ類の言明を S が誤って反証することはないという仮定のもとで，不完全性を証明していることである．しかし第二に，それはゲーデルの証明と異なり，そのままでは，S で決定不能な特定の言明を具体的に示していない．他方，この議論で S の不完全性を結論するためには，構文論の算術化を導入する必要はまったくない．というのは，S の算術的不完全性は，ディオファントス方程式についての普通の算術的言明の中に見いだせるからである．しかし，算術化を導入すれば，この議論は，ゲーデルのオリジナルな証明のように特定の決定不能な言明を示すように改良することもできる．

マティヤシェヴィッチ＝ロビンソン＝デイビス＝パットナム定理に沿った第一不完全性定理のこの証明については，第**3**章でさらに詳しく説明する．その章は，計算可能性理論および，それと不完全性定理との関係を解説することにあてている．第一不完全性定理を証明する第三のアプローチは，「コルモゴロフ複雑性」の概念を使うもので，それは第**8**章で紹介する．

これらの別証明の議論を追うのが面倒な読者は，不完全性が奇妙な自己言及言明の算術的翻訳に限られたものではないというポイントだけ押さえておいてくれればいい．実際，ゲーデルの定理が適用できる体系 S においては，「方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ が解をもたない」という形の言明で決定不能なものがあることを私たちは知っている．私たちにわからないことは，この形の言明で数学的に興味あるものが，PA や ZFC で決定不能になるかどうかである．

不完全性定理の弱い変種

PA や他の理論の算術部分に対する不完全性定理については，まだ他にも証明がある．例えば，パットナム［Putnam 00］は，ソール・クリプキ[32]によるそのような証明を紹介している．すでに述べた証明と異なり，クリプキの証明は，自己言及的言明を利用しないし，計算可能性理論にも依存しない．（代わりに，それは 7.3 節で説明する PA の**超準モデル**の存在を利用する．）しかしながら，証明される結論は，決定不能であることが示される言明の論理的複雑さという点では，ゲーデルの定理のそれより弱くなる．つまり，それはゴールドバッハ類の言明ではない．したがって，その議論からは第二不完全性定理が導かれないことも記しておく．

第二不完全性定理の証明

1931 年の論文における，ゲーデルの第二不完全性定理の証明は大凡ハンドウェイブ[33]でできている．つまり，細部の実行を抜きにして議論のスケッチだけをしている．その議論は次のように単純である．第一不完全性定理の証明から，もし体系 P が無矛盾なら，G は P で証明可能ではなく，それゆえそれは真であることが示された．この議論をよく調べれば，それが P の中で実行できる種類の数学的推論だけを使っていることがわかる．したがって，「もし P が無矛盾ならば，G である」が P で証明可能ということになる．そのときに，もし P が無矛盾だとすれば，G は P で証明可能になってしまう．しかし，G は P で証明可能でないから，「P が無矛盾である」は P で証明可能ではない．

この結論は次のように強められる．「もし P が無矛盾ならば，G である」

32） Saul Kripke（1940 年生）は，ユダヤ系アメリカ人の哲学者・論理学者．とくに言語哲学の分野の業績で知られる．プリンストン大学名誉教授．

33） いい加減な議論をして，難しい問題を何でもないようにごまかすこと，あるいはそういう議論を指す．

が P で証明可能であるのみならず,「もし G ならば,P が無矛盾である」も P で証明可能である.なぜなら,G は「G が P の定理ではない」と P において同値であり,そして証明可能ではない言明をもつどんな理論も無矛盾であることは,P でも証明可能な事実だからである.かくして,G と「P が無矛盾」は,P においてじつは同値である.

第一不完全性定理の場合と同様,ゲーデルの説明から明らかなように,この議論は「ある程度の算術」を含む広範囲の形式体系に拡張できる.ただし,この「ある程度」は,第一不完全性定理における「ある程度」と同じではない.形式体系 S に対する第二不完全性定理のゲーデルの証明は,「もし S が無矛盾であるなら,G が S で証明不可能である」ことの証明が S 自身の中で形式化できることに依っている.形式体系が第一不完全性定理の証明をその体系内で形式化しうるためには,第一不完全性定理の証明を体系に適用するのに必要な以上の,もっと大きな量の算術を含んでいる必要がある.例えば,本書巻末の補遺で与えられるロビンソン算術のような形式体系には,第一不完全性定理は適用されるが,第二は適用されない.これは,ロビンソン算術がそれ自身の無矛盾性を証明することを意味するわけではない.自らの無矛盾性を証明しないことを示すために,そこで定式化されるような仕方では,第二不完全性定理を使うことができないというだけのことである.(自らの無矛盾性を証明する算術理論の定式化も論理学の研究文献に存在する.これらはいろいろな点で非常に弱く,例えばすべての数が次の数をもつことがいえないのだが,にもかかわらず自明でない算術的論証を相当程度扱うことができる.)

ゲーデルの議論はそのままでも読者に対して非常に説得力があり,彼自身は第二不完全性定理の証明を形式的に細部まで完成して提示する余裕が結局なかった.彼に代わって,ダヴィット・ヒルベルトとパウル・ベルナイス[34]による2巻本『数学基礎論』の第2巻(1939年刊行)で,その作業が

34) Paul Bernays (1988–1977) は,ユダヤ人数学者で,ヒルベルトの協力者として知られる.ナチス政権誕生により,ゲッチンゲンからスイスに移った.ゲーデルとも生涯親しかった.

実行された．第二不完全性定理のゲーデルのオリジナルな証明法は，最も汎用性が高く，理解もしやすいが，特定の理論に対しては別の証明法も発見されている．

第一不完全性定理の場合と同様，第二不完全性定理の証明も普通の数学的な証明ではないと考えている人がよくいる．例えば，カドバニー[Kadvany 89, P. 178]は，「第二定理が普通の意味の定理ではないことは，歴史が示している」とコメントしている．これは，第一不完全性定理についての類似のコメントと違って，定理の単純な誤解に基づいた意見ではない．そうではなくて，カドバニーが問題にしていることは，第二不完全性定理では，「S が無矛盾である」ことを算術の言語においてどのように定式化するかを決めておかなければならないという事実である．これを任意の形式体系について考えるなら，かなり微妙な事柄になる．最も一般的な形で第二不完全性定理をいかに定式化するかは，1960年ごろにアメリカの哲学者かつ論理学者のソロモン・フェファーマン(35)の仕事を通してようやく明確になった．

しかしながら，これらの微妙な点は，PA や ZFC，あるいは私たちが論理学で実際に勉強する他のいかなる理論に対しても，この定理を適用する際の定式化には影響しない．これらの理論では，「S が無矛盾である」ことを算術の言明として表現する方法は本質的にひとつしかない(36)からだ．それは，明白で自然な唯一の方法である．カドバニーは，この文脈で次のように述べた．「何が自然であるかは歴史が選択する問題であり，その選択は常に新しい革新的な諸概念に適合するように，数学的伝統に逆らってなされるものである」．これは，紛らわしい意見だ．一般の場合（任意の理論 S を問題にする場合）には，端的に言って自然な選択というものはなく，そして歴史による選択もなされていない．PA や ZFC のような理論に関し

35） Solomon Feferman (1923 年生）は，アメリカの数理論理学者．タルスキの弟子で，スタンフォード大学教授．ゲーデル全集の監修者．

36） 素朴には正しい主張だが，例えばロッサー文を作るのと同じ方法で無矛盾性を表すと証明可能な文が得られることも知られており，そう明らかに断定はできないと訳者は思う．

ては，「Sが無矛盾である」ことを算術的に定式化する方法の私たちの選び方は，ゲーデル数化の方法さえ定まっているならば，自然だと言える．それは，初等整数論の基本定理（「すべての自然数は，いくつかの素数の積に唯一通りに分解される」）を算術的に扱う場合に，数の有限列を1つの数によって表現する方法さえ与えれば，ある定式化の選択が自然になるということと同じである．ゲーデル数化の選び方以外には，困難な選択も恣意的な選択も含まれない．そして，ゲーデル数化の選択には恣意的な面があるものの，標準的なゲーデル数化だけを考えれば，これらの理論に関しては同等なゲーデル文がもたらされ，「Sが無矛盾である」ことにも同等な形式化がもたらされる．

これらのコメントを読んでみなさんも感じているだろうが，カドバニーによって提起されたこの特殊な問題は，論理学的にもそして哲学的にも，いくぶん専門的である．だから，この本の残りの部分でも，これ以上追求することはないだろう．このテーマに興味をもつ読者は，拙著［Franzén 04］でより詳しく論じているので，そちらをご覧いただきたい．

2.8 「ポストモダン的状況」とは？

不完全性定理の文脈では，証明可能性や決定可能性は，何らかの形式体系における証明可能性や決定可能性を意味する．言明Aが，絶対的な意味で証明可能，反証可能，あるいは決定不能であるといった概念は論理学には存在せず，Aが，形式体系Sで証明可能，反証可能，あるいは決定不能であるという概念だけが存在する．Sで決定不能などんな言明Aも，他のある体系では決定可能になる．とくに，もし無矛盾な体系SでAが決定不能なら，新しい公理としてAをSに追加して得られる無矛盾な体系$S+A$でAは証明可能であり，公理としてAの否定を追加して得られる無矛盾な体系$S+\text{not-}A$でAは反証可能である．もちろんこれは，数

学的に納得いく論証で証明可能になるか反証可能になるというようなまっとうな意味合いで A が決定可能かどうかを述べているわけではないし，PA とか ZFC のような興味ある特定の理論において決定可能かどうかを述べているわけでもない．

ある特定の形式体系で，ある特定の言明が決定不能であるという事実が，数学がその言明を証明する立場と，それを反証する立場とに「分岐する」ことを意味すると解されることがある．これとのアナロジーがよく引き合いに出されるのは，平行線の公準がユークリッド幾何学の他の公理から論理的に独立であり，それにより平行線の公準を成り立たせない非ユークリッド幾何の公理化が導かれることである．カドバニー［Kadvany 89，P. 162］は，この考え方を，ゲーデルの定理に関するある種の一般的見かたと組み合わせて取り上げ，それをポストモダニズムと同質であるとしている．

> ゲーデルの定理がポストモダン的状況をいかに引き起こすかは，最も手近には，すでに第一不完全性定理に見られる．この定理は実際のところ次のようなものである．ある無矛盾な公理系が，加算と乗算だけを用いる初等数論（ただし加算か乗算のどちらか片方だけでは得られない初等数論）から導かれるいくつかの弱い定理を証明できるくらいに強いなら，それは不完全になる——すなわち，考察対象の体系の構文で定式化される数学的言明で，その体系では証明可能でも反証可能でもないものが常に存在することになる．そのような言明は，その体系に関して**決定不能**と言われる．決定不能な命題とその否定は，どちらもそれぞれもとの体系と無矛盾であるから，その体系に新しい公理として決定不能な命題を加えるか，その否定を加えるかによって，互いに両立しない 2 つの新しい拡張体系が得られる．この手順の古典的例は，平行線の公準を除いた初等幾何の公理系に平行線の公準の否定を加えることによって生まれた非ユークリッド幾何である．このように作られた新しい体系にも，もとの体系に対するものとは異なる新しい決定不能命題がある．新しい決

> 定不能命題が構成されると，それかまたはその否定を含むように新しい体系を作るというプロセスは，終点をもたない分岐木のように無限に続く．

ここで示されているアナロジーをもう少し詳しく見てみよう．ユークリッド幾何学の平行線の公準をそれと両立不可能な公理で置き換えて得られる幾何学の公理的理論は，ユークリッド幾何学自身と同様に，数学的に興味深く，かつ応用上も有用だ．とくに，ユークリッドの平面幾何は地表の小さい部分に適用されるが，他方で広大な地表を扱う幾何は非ユークリッドである．ユークリッド幾何学の有用な代替物は，平行線の公準を単にその否定で置き換えるだけで得られるものではなく，平行線の公準とは両立しないもっと特別な公理の導入による．楕円幾何学，つまり球面の幾何学（大凡地球の表面に関する幾何学）の場合，平行線の公準を置き換える公理とは，与えられた直線に対して，その線上にない点を含んで平行になる直線はないというものだ．

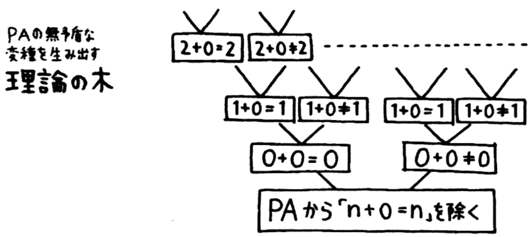
平行線の公準とのアナロジーが，決定不能性のすべての場合に当てはまるわけではないことは，容易に確かめることができる．例えば，PA は，「すべての n について $n+0=n$」という公理をもつ．この公理は，PA の残りの公理から証明可能ではない．それで，私たちはこの公理を「「すべての n について $n+0=n$」ではない」に置き換えることによって無矛盾な理論を得る．1 階論理に対するゲーデルの完全性定理（第 7 章で説明）によって，得られた理論は**モデル**をもつ[37]．すなわち，$e+0$ が e と等しくないような e を含み，それ以外は PA の公理をすべて満たす数学的構造を具体的に提示することができる．

しかし，非ユークリッド幾何の場合と異なり，そのような数学的構造は，数学的にも，応用上の観点からも，何ら特別の興味をもちえない．そして

37）モデルについては 7.1 節，とくに「論理規則の健全性と完全性」の項を参照．

もちろん，そのような構造が，いかにたくさん存在しても，「すべての n について，$n+0=n$」という見解に何ら影響を与えない．

私たちは，PA から $n+0=n$ の公理を除き，$0+0=0$ あるいはその否定を加え，そうして得られた2つの理論にそれぞれ $1+0=1$ あるいはその否定を加えるという操作を続けることで，PA の無矛盾な変種から成る無限木を作ることができる．例えば，$0+0$ が 0 に等しく，$1+0$ が 1 に等しくないことを仮定する理論があり，$0+0$ が 0 に等しくなく，しかし $1+0$ が 1 に等しいことを仮定する理論などもある．だがこれによって「ポストモダン的状況」が創りだされるのではなく，ただ非常につまらない理論の無限木が生まれるだけである[38]．（第7章で，この木のすべての理論が無矛盾であることがどうしてわかるかを説明する．）



だから，もし不完全性定理が算術のバリエーションの幅を拡げるものだと（たぶん，ポストモダニズムの精神で）考えるとするなら，上のつまらない例とゲーデルの定理が示した不完全性との間には決定的な差異があるに違いない．何が決定的な差異になるだろうか？

上で述べた理論の無限木がつまらない理由のひとつは，すべての自然数について言明 $n+0=n$ は真であり，これらの言明のいくつかあるいはすべてを拒否する理論を導入する明確な目的がないことである．結果として生じる理論は，おもしろい応用をもたないし，数学的にも役に立たない．今度は，ゲーデルの第一不完全性定理の証明に基づいて，PA の「分岐」，

38） この議論に不完全性定理が用いられていないことに注意．

とくに「二分岐」を考えよう．ゲーデルの証明で作成された決定不能な言明 G は，「PA が無矛盾である」ことと PA で同値である．そして，PA に新しい公理として「PA が無矛盾である」か，あるいは「PA が矛盾している」かのどちらかを付け加えることによって，PA の 2 つの無矛盾な拡張が実際に得られる．同様に，結果として生じる理論 T に，私たちは新しい公理として「T が無矛盾である」か，あるいは「T が矛盾している」かのどちらかを付け加えることによって，2 つの無矛盾な拡張を得る．以上の操作が続く．しかし，あのつまらない例と同様に，「PA が無矛盾である」，「T が無矛盾である」等々の陳述はすべて真であることが知られているから，「PA が矛盾している」や「T が矛盾している」を加えて得られる理論に対して何らかの興味をもつべき理由はありそうにない．この無限木において，直ちに興味が生じそうな唯一の枝は，理論の列 PA, PA_1, PA_2 , ……で，ここで PA_1 は PA に「PA が無矛盾」を加えたもの，PA_2 は PA_1 に「PA_1 が無矛盾」を加えたもの，等々である．この枝に対する興味は，それが PA で証明可能でない真なる言明を無限個加えた PA の拡張をもたらすという事実にある．

第 7 章でさらに考察されるいくぶん専門的な話題に関して，ここでは簡単に触れておこう．“PA の公理＋「PA が無矛盾」の否定”という理論を成り立たせる数学的構造は，算術の**超準モデル**として知られるものの一種である．それは，「標準」自然数 0, 1, 2, ……に加えて，自然数ではない「無限大元」も含んでいる．このような構造には確かに数学的な興味を惹くが，しかしこのような構造を得るために偽な算術公理を含む理論を導入する必要があるわけではない．

上述の方法で生成された（興味深い枝の中の）無限個の無矛盾性言明のすべてが真であることはどうしてわかるのだろうか？　それには曖昧な性質の直観的洞察を用い，理論が無矛盾であることが知覚されると主張する以外にないと，しばしば誤解される．じつは，これらの無矛盾性言明が真であることは，PA が**健全な**理論であることの帰結として，換言すれば，理

論の公理がすべて真であることから，まったく普通の数学通りに証明可能である．つまり，普通の算術的言明に対する数学的証明において算術的言明の真理を知覚すること以上に特別なことを知覚する必要はない．もちろん誰でも，この証明を疑問視し，PA，PA_1，その他の理論が無矛盾であるという定理に懐疑的立場をとることは自由だ．こういうことに関しては，この定理が，同程度の抽象度をもつ他の数学的な定理と異なるところはない．例えば，フェルマの最終定理のワイルズの証明に対して懐疑的な立場をとり，その証明によってはこの定理が真であることは本当にはわからないと論ずることもできるかもしれない．けれども，そのような懐疑主義がどんな優れた点をもっていようと，無矛盾性証明に関することが，他の数学的文脈以上に重要な関心事にはなりない．

上述の議論において PA を ZFC で置き換えてみよう．そうすると木に含まれるすべての理論の無矛盾性が完全に普通の数学で証明可能であるとはもはや言えない．（ZFC の無矛盾性に対し唯一知られた証明は，普通の数学の一部にならない集合論的公理を使う．）しかし，それはまだ算術を異なる方向に「分岐」させてはいないのだ．ZFC に「ZFC は矛盾している」を付け加えてできる理論は，ZFC が無矛盾だとすれば，実際無矛盾である．しかし，それは，目に見える数学上の面白味も，応用ももっていない．

導入された決定不能な言明が真かどうか簡単にわからないような例を他にも探すことができる．マティヤシェヴィッチ＝ロビンソン＝デイビス＝パットナム定理（第 **3** 章で説明）と集合論のいくつかの結果を用いれば，「ディオファントス方程式 $D(x_1, . . . , x_n)=0$ が解をもたない」という形の言明の集合で，以下のような議論を成り立たせるものを私たちは実際に作れる．すなわち PA からはじめ，その集合に含まれる言明もしくはその否定を加えて，前述のような無限木をつくるのだ．ここで，どの言明についても，私たちはそれが真かどうかわからないものとする．重ねて言うが，これは数学に「ポストモダン的状況」を引き起こすものではない．こうして得られる無数の理論は，理論上の面白味も応用ももっていないからであ

る．上述の形式の無数の言明は，現代の数学では証明不可能であると知られているだけで，そのいくつかはひょっとすると重要なものかもしれないし，また将来的には真であるか偽であるかが証明されるかもしれないが，それはわからない．

要するに，不完全性定理が数学（とくに算術）を無限個の互いに両立しない方向への枝分かれ状態に導いたことはかつてなかったし，またそうなる必然性もないのだ．このような分岐を別の例で考えれば，宇宙における人類の位置について考察するときに，次のような枝分かれを考えるようなものだ．まず，宇宙の可能なあり方を2つの方向――私たちの惑星から1千光年以内に地球外生命があると仮定するものと，そうでないと仮定するもの――に「分岐」する．そしてそれぞれの可能性は，（現在の知識と矛盾しない範囲で）提出しうるさらなる仮定によってふたたび細分されるというように考えていく．このような考察は宇宙についての一般的な理解とはなりえない．同様に不完全性というたんなる事実も，数学において「分岐」を引き起こしはしない．

先の引用論文で，カドバニーは，不完全性定理の証明に起因する決定不能な言明だけではなく，ゲーデルとコーエン，その他の人たちの仕事によって集合論において決定不能であると示された言明についてもコメントしている．以前にも述べたように，連続体仮説はZFCで決定不能と知られているだけでなく，かなり多くの数学者が妥当と見なすどんな集合論的原理によっても決定されない言明の重要な例である．この事実は，非ユークリッド幾何の発展と違って，集合論を異なる方向に分岐させることはなかったが，算術の場合よりは，このような分岐が将来起きるかもしれないという議論の余地はまだ大きい．しかしながら，集合論の不完全性は，ゲーデルの定理によって発覚した不完全性現象から生じるものではないから，この本では第**8**章でときどき付随的に扱われる他は，さらに考察を進めることはない．

本節で触れたいろいろな意見は，第二不完全性定理につきまとう懐疑主

義との関連において，第5章でさらに議論することになる．

2.9 心 対 コンピュータ

英国の哲学者 J.R. ルーカス(39)に通常帰されている次のような議論がある．PA のような理論のゲーデル文が真だとわかるのは，その理論が無矛盾であると私たちが知っているからであるという事実を捕まえて，“だから人間の心はどんな機械よりも優る”と結論するのだ［Lucas 61］：

> 私たちがどんな複雑な機械を作っても，それが機械であるなら，それは形式体系に相当し，その体系で証明できない論理式を見いだすゲーデルの手続きに結局従う．この論理式は，機械には真なものとして作りだすことはできないが，心はそれが真であるとわかる．

この議論が不適切なのは，次の間違った考えに依存しているからである．「ゲーデルの定理は，簡単な算術を生産する程度には強いどんな無矛盾な体系にも，私たちが真であると知りうる論理式で，その体系では証明できないものがある，と述べている.」ゲーデルの定理は，そんなことを述べてはいない．すでに強調したように，一般に私たちは体系のゲーデル文が真であるかどうかの知識をもたない．たとえ，それが実際には真になる場合であってもである．私たちにわかることは，ゲーデル文が真になるのは，体系が無矛盾のときで，そのときに限ることであり，ここまでは体系自体でも証明可能である．体系が無矛盾であることを知っているとき，私たちはそのゲーデル文が真であることも知るが，しかし一般に私たちは形式体系が無矛盾かどうかを知らない．もし人間の心がどんな無矛盾な形式体系

39） John Lucas（1929 年生）は，オックスフォード大学の哲学者．

についても無矛盾性を決定する能力をもっていたなら，これは確かに人間の心が計算機に優ることを意味するだろうが，しかし，それが事実であると信じる理由は何もない．

算術に関する限り，人間の心がどんな計算機（あるいは，どんな形式体系）にも優るということを不完全性定理から結論できないとすれば，今度は「どんな機械も心の適切なモデルにはならない」という弱い結論を引きだそうと試みたくなるかもしれない．機械は算術において人間の心に優っているかもしれないけれど，どんな機械も人間の心とまったく同等ではありえないというわけである．けれども，これも不完全性定理から導かれることではない．「人間の算術能力」のようなものがあると仮定しよう（これはえらく大きい仮定だが)．そして続けて，ある特別な形式体系 S が正確にその能力を具体化すると仮定しよう．もし S が無矛盾であることを私たちが知っているなら，じつは私たちが不完全性定理との矛盾をもっていることになるだろう．しかしここにふたたび欠けているのは，なぜ S が無矛盾だと私たちは知りうるのかの議論である．ルーカス［Lucas 61］はここで見当違いの考察をもちこむ．「私たちが言えることは，私たちが無矛盾なら S が無矛盾であることだけである．」これは不適切である．たとえ私たち自身が無矛盾であることを私たちが知っているとしても，S が人の算術能力を成文化したものであることがわからない限り（どうやってわかりうるのか？)，これから S が無矛盾であると結論する理由はない．実際，ゲーデル自身は次のようにコメントしている．

> 正確に人間の算術能力を成文化する形式体系 S が存在する可能性は排除されない，もっとも，その S の公理が明らかに真であると認知することはできないだろうが．

そこで，さらに結論を弱めてみよう．不完全性定理から導かれることは，“私たち自身で真だと確信できるような算術的真理を表現している，しか

もそれだけを表現していると私たちが知りうる形式体系 S を実際に特定することはできない”ということである．なぜなら，私たちがそのすべての算術の定理が真であることを知っている体系 S が与えられれば，真であることも知っていながら，S の定理ではないような算術的言明（「S が無矛盾である」の算術化）を作ることができるからである．したがって，私たちの算術的知識をすべて余すところなく述べる形式体系を特定することはできない．

ゲーデル自身によって提出されたこの最後の議論は，私たちの数学の知識の無尽蔵さを示しているように思われ，不完全性定理の最も驚くべき結論のひとつである．これだけでも，人間の数学的知識は機械と計算の言葉だけで記述できない証拠であると言えるかもしれない．この議論は第 **6** 章で考察する．

2.10 その後の発展

前にも注意したように，不完全性定理の証明のどこを見ても，PA や ZFC における決定不能な言明の中にゴールドバッハの予想のような自然な数学的言明が含まれるかどうかは何もわからない．もし整数論の古典的問題のどれかが PA で解決不可能であると示されたなら，非常に大きな関心が集まるだろうが，この章でこれまで記述された方法と結果はそんなことがあるかどうかについての手がかりをまったく与えていない．

ここ数十年，不完全性定理の成り行きとして，PA やその他の理論で，ある種の算術的言明の非決定性を打ち立てようとかなりの仕事がなされた．それらの算術的言明は，論理学の外で数学者の心に思い浮かぶ予想を表現するものではないが，ゲーデル流の言明や無矛盾性の言明に比べれば，「普通の数学」にずっと近いものだ．この種の最初の結果は，ある組み合わせ原理の算術化が PA で証明できないことを確立した**パリス＝ハーリン**

トンの定理（1977）[40] である.

この原理は，PA では証明できないのだけれど，じつは PA において“偽なるゴールドバッハ類の言明を PA は反証しない”という言明と同値になり，したがって普通の数学的な推論を使って証明可能だ．ところで，私たちは ZFC もその算術的部分において不完全であることを知っている．ZFC の算術部分を拡張するひとつの方法が，1940 年代にゲーデルによって提案され，以来広く研究されてきた．このアプローチは，強い集合論的原理の「無限大の諸公理」で ZFC を拡張するもので，それにより ZFC では証明可能でない算術的言明が含意される.

1960 年代にはじまるもうひとつの発展の方向性は，コルモゴロフ複雑性として知られる概念に関する理論と不完全性を関連づけるものだ．この発展は，とくにアメリカの数学者グレゴリー・チャイティン[41]の仕事と結びつき，多数の一般向け書籍や解説文の中で彼によって紹介されている.

第 **8** 章では，まず複雑さとその不完全性現象に対する一般的関連を議論する．さらにパリス = ハーリントンの定理を解説し，ZFC で証明可能でない算術的言明を含意する「無限大の諸公理」の使用についても簡単に触れる.

---

40) ジェフ・パリスが発見した独立命題をレオ・ハーリントンが現在の形に改良した．『数理論理学ハンドブック』(1977) を編集中だった故バーワイズが，自ら原稿をタイプし，その最終章に収めた.

41) Gregory J. Chaitin (1947 年アルゼンチン生まれ)．IBM のワトソン研究所の名誉研究員.

3. 計算可能性，形式体系，不完全性

3.1 記号列の扱い

形式体系における公理や定理，そしてそれ以外の言明や，体系における証明も，すべて**記号の列**と見なすことができる．数学や記号論理学には，いろいろ独自の数学記号が使われているが，これは便宜上のものにすぎない．扱える記号が，標準的なキーボードの上に書かれているような，日常英語で使う文字（小文字，大文字，数字，括弧など）だけであると仮定してもまったく構わない．ただし，標準キーボードでスペース・バーによって生成される空白もひとつの記号である．以下で行う定義や議論は，どんな記号の集合からはじめても，それが有限集合である限り適用できるものだ．

記号の有限列を単に**列**（string）と呼ぶ．例えば，次のようなものが列である：

Let me not to the marriage of true minds admit impediments.[42]

aaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaaa

=）=）::))

in the nick of time[43]

42） 真心同士の結婚に妨げがあるだなんて認めるものか．（シェークスピアのソネット 116）

43） 「間一髪」を意味する英語の慣用句．

watashi wa neko da yo[44]
9）#lkIKO ＋＝＝ FDBk2 ＋＋ ?%
～（Ex）（y）（yEx iff ～yEy）
90239499993930200 11109

これらの例が示すように，列は，言語によって，意味のある語や言明であったり，意味のない表現であったりする．また，列と関連で，「記号」について語るときには，次のような曖昧さが生じる．列「aaaa」は 1 つの記号（文字 a）を含んでいるというべきか，あるいは 4 つの記号を含んでいるというべきか？　私たちは，「aaaa」が 1 つの記号の 4 つの**出現**をもつと表現することで，この曖昧さを解消する．列の**長さ**は，列に含まれる記号の「出現」の総数である．上に与えた例はどれも短い列だが，しかし論理学や数学において列の長さに制限はなく，ガンジス川の中の砂粒より多くの記号を含む列だって自由に議論できる．つまり，ここでの列は，数とまったく同じような数学的対象であって，現実の物理的表現をもつ必要はないということだ．じつは数学的な見地では，列と数とは交換可能な概念であって，列は数を表し，数は列を表すことができる．次節で述べることだが，数を使って任意の列を表現することを，通常**ゲーデル数化**と呼んでいる．でもまずは，もっとよく知られている逆の方向，つまり列を使った自然数の表現について検討しよう．

自然数（非負整数）を表示するために，数学はもちろん，英語などの多くの日常言語でも使われている 0 から 9 までの数字の並びを，**数字列**と呼ぶことにしよう．例えば，数字列「165」は数 165 を表示し，数字列「0」は数 0 を示す．二桁以上の数字列は「0」ではじまることを許さないことにすれば，すべての自然数が，それと一意に対応する数字列によって表示される．日常言語で，私たちはこの数表示方法（10 進位取記数法）に

44） 原文のまま．「私は猫だよ」のローマ字表記か？

とても慣れ親しんでいるので，数 165 と列「165」を区別するのはかえって難しいかもしれない．また，英語の文字だけで考えても（例えば，漢数字などを用いなくても），自然数を列で表現する方法は他にもある．そのひとつは，「one hundred and sixty-five」のように基数詞の使用によるものだ．この記法をすべての自然数を扱えるように拡張するには，いくつか新しい語が必要であり，種々の体系化が存在する．例えばランドン・カート・ノル[45]の方法では，3,141,592,653,589,793,238,462,643,383 は，次のように読まれる．

3 オクティリオン，141 セプティリオン，592 セクスティリオン，653 クィンティリオン，589 クワドリリオン，793 トリリオン，238 ビリオン，462 ミリオン，643 サウザンド，383.

自然数を列で表す別法で，計算の理論や実際にも広く使われているのは，二進記数法（底 2 の位取記数法）である．二進記数法で，上記の数は以下のようになる．

10100010011010101010000111110000000010001101110
011111101000000010000110100100100011110010110111.

列を使った自然数の表示については，誰でも慣れ親しんでいるはずだ．なぜなら，数値情報を書き留めるためにも，そして足し算や掛け算を筆算で行うためにも，列によって数を表示せざるをえないからである．逆に，任意の列に自然数の「名前」を与えることは，日常的状況ではほとんどなじみがないだろう．しかし，論理学や計算可能性理論の文脈においては，

45） Landon Curt Noll（1960 年生）は，カリフォルニア在住の民間研究者．数学，天文学，暗号理論において独自の発見が多数ある．尚，上記の数の読み方は標準語の範囲であり，カート・ノルはさらにずっと多桁の数に対する読み方を考案している．

これも自然な考え方である．

形式言語における定理などの文だけではなく，形式体系の証明も記号の列と見なせることを上に述べた．証明は文の並び（sequence）であるから，そのような並びを列として表す必要がある．これを行う簡単な方法は，どの文にも現れないその言語の記号，例えば£を選び，それを列における文の区切りに用いるものである．すると例えば，文「aishiteru no」，「suki da yo」，「baka da yo」の並びは，

aishiteru no£suki da yo£baka da yo[46]

という列で表される．

けれども，もしどんな記号もいずれかの文に現れていたらどうしたらいいだろうか？　その場合でも，列のどんな並びも1つの列で表すことが可能である．その方法は，第**8**章で考える．

3.2 計算的枚挙可能性と決定可能性

計算的枚挙可能集合とは

数字列全体がもつ性質で，不完全性定理との関係においてとくに重要になるものが2つがある．第一の性質は，数字列のすべてを生成する**機械的手順**があること，つまりそれらをひとつずつ生成して書き並べる手順があることである．例えば，最初に一桁の列をすべて書き並べ，それからすべての二桁の列（0からはじまる列を除く）を書き並べ，と順々に長い列を書き並べていけばよい．しかし，この手順を完全に記述するためには，同じ長さの列を書き並べる順序を決めておく必要がある．自然な順序の選択は，記号に順序をつけて，同じ長さの列を“アルファベット順”で（数学

46） 例文は原文のまま．

でいうところの**辞書式順序**で）生成するものである．こうして得られるのが，

$$0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, \ldots$$

である．

この数字列の順序は，私たちがまさに慣れ親しんでいるもので，列が表示する数の大きさの順と一致している．こうなるのは2つの理由がある．ひとつは，数字の“アルファベット順”が，数字が示す数の大小順と一致していること．そしてもうひとつは，数字列によって数を示すのに位取り表現法を使っていることだ．もしも「短いものが長いものより前にくる」という原則を，同じ長さの列は辞書式順序に従うことと組み合わせて，数の英語名を生成していくとすれば，次のようなリストになる．

one, six, ten, two, five, four, nine, zero, eight, fifty, forty, seven, sixty, three, eighty, eleven, ninety, thirty, twelve, twenty, fifteen, seventy, sixteen, eighteen, fourteen, nineteen, thirteen, fifty-one, fifty-six, fifty-two, forty-one, . . .

上に述べた数字列生成の機械的手順により，すべての数字列は，もしその手順を限りなく続けていけるなら，いつか生成列の中に現われる．ここで，手順が“機械的”であるというのは，それが特別な判断力，選択力，あるいは問題解決力を必要とせず，ただいくつかの明示的な規則の適用だけを必要とするという意味である．別な言い方をすれば，これらの規則に従って数字列を生成し，順にそれらを出力するように計算機をプログラムすることが容易にできるということである．一般に，列の集合 E が**計算的枚挙可能**であるとは，時間，エネルギー，記憶容量などの制限をすべて無視した上で，E の要素すべてを計算し，出力するように計算機をプログラムできることをいう．つまり，この用語を使えば，数字列全体の集合は

計算的枚挙可能である．

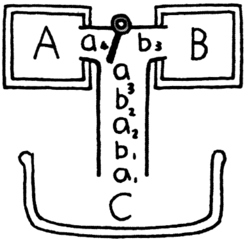
さらなる議論のために，いくつかもう少し明確にしておくことがある．私たちが「Eの要素すべてを計算し，出力するように計算機をプログラムする」というとき，プログラムの出力は繰り返しを許し，Eの同じ要素が二回以上印字されてもよいのだろうか？　じつは，繰り返しを許して計算的に枚挙可能な無限集合は，繰り返しなしでも計算的に枚挙可能である．したがって，Eのすべての要素が最終的に生成列に現われる限り，計算機の出力に繰り返しを認めてよい．さらに微妙な問題は，Eが有限の場合に起きる．Eのすべての要素を生成し終えたときに計算機は停止するのか，あるいはそれ以上新しい列を出力することがなくても計算は無限に続くのか？　有限集合Eの計算的枚挙可能性について述べるとき，便宜的な約束として，Eの要素を計算し出力するようにプログラムされた計算機は動作を永久に続けるものとする．つまり，その集合の列をすべて生成した後，少なくともひとつの列を無限回印字するか，あるいは何もしないでずっと静かに空回りしていることを許すのだ．

「計算的枚挙可能集合」の定義は，列の集合に関して定式化されたが，しかしそれを自然数の集合にも適用することができる．自然数の集合が計算的枚挙可能であるのは，対応する数字列の集合が計算的枚挙可能であるときで，かつそのときに限る．同様にこの定義は，列によって表現されるどんな数学的対象の集合についても当てはめることができる．例えば，すべての正の有理数は，列m/nとしてただ一通りに表示される（ただし，mとnは数字列で，それらが表す自然数は1以外の公約数をもたない）．これによって，正の有理数の計算的枚挙可能集合について述べることが可能になる．

1936年にアラン・チューリングは，無制限の作業記憶容量をもつ多目的デジタルコンピュータの理論的模型（万能チューリング機械）を導入し，そして機械的に計算されうることはすべてこの機械によって計算可能であるということに妥当な説明を与えた．今日では，チューリングの計算可能性と互いに同値な計算可能性の定義が，論理学と数学において他にも多数

使われている．そして，現在の計算機は，記憶容量を制限されていること以外は，万能チューリング機械の物理的実現であると考えられている．計算可能性理論の数学的な扱いにおいては，その理論の基本的な諸概念を形式的に定義するために，チューリング機械などの計算模型が用いられている．この本では，これらの基本概念について非形式的定義で間に合わせているのだが，それでもこの理論の重要な結果については一応理解して享受できるようにしたい．私たちが計算機の動作について知っておくべきことは，プログラムの実行は一連の計算ステップとして記述できることで，いくつかの計算ステップを実行して，しばらく他のことをしてから，戻って計算の続きのステップを行うといったことも可能である．

以上の定義に基づいて行えるようなインフォーマルな推論の例を見てみよう．もし A と B が共に計算的枚挙可能集合であるなら，それらの和集合，つまり A か B あるいは両方に属している列からなる集合 C が，同じく計算的枚挙可能になることがわかる．なぜなら，C を枚挙するためには，A と B の枚挙のステップ[47]を交互に実行し，A あるいは B の要素が生成されるたびに，それを出力として送ればよいからだ．



計算的決定可能集合とは

数字列全体の集合がもつ第二の性質は，記号列を任意に与えたときに，それがその集合の計算的枚挙にいつか現われるかどうかを判定する**アルゴリズム**が存在することである．アルゴリズムというのは，計算機で実行できるような機械的手順であって，最後には必ず停止して，一般には出力と

47) 計算の 1 ステップはプログラムにおける 1 つの命令の実行であり，ステップごとに 1 つの列が出されるわけではない．しかし，話を無限集合に限れば，枚挙の 1 ステップを 1 つの列の出力と考えてもここでは差し支えない．

してある列を生成するものだ．（文献によっては別の言葉遣いをしていて，アルゴリズムは必ずしも停止しない機械的手順であるとされている.）数字列全体については，そのアルゴリズムは単純である．列のすべての記号が数字であり，そして長さが1でない限り，0ではじまらないことをチェックすればよい．列の集合 E が**計算可能**あるいは**計算的決定可能**，あるいは単に**決定可能**というのは，任意の記号列 s が与えられて，s が E に入るかどうかを判定するように計算機をプログラムすることが可能であることをいう．つまり，s が入力されると，計算機は計算を実行して，s が E に入るときは「イエス」と出力し，s が E に入らないときは「ノー」と出力する．（計算的枚挙可能性の場合と同様に，この定義を自然数の集合にも適用することができる.）決定可能でない集合は（計算的に）**決定不能**であるといわれる．

ここでふたたび注意しておきたいのは，私たちが語っているのは，何が数学的に可能かについてであり，いかなる意味でも実際に行えるかどうかではないということだ．例えば，列の有限集合 E はすべて決定可能である．というのは，列 s が E に入るかどうかを決定するアルゴリズムは，E の列全部のリストをしらみ潰しに調べて，s を探せばよいからである．計算機は，E の列全部のリストをプログラムに包含させることにより，このアルゴリズムを実行するようにプログラムすることができる．もちろん，もし E が，例えばクワドリリオン個（千兆個）の列を含んでいるなら，これが現実にできるかどうかは別問題である．与えられた列が E に入るか否かを判定するように，物理的な計算機を実際に（何か別の方法で）プログラムすることができるかもしれないし，できないかもしれない．以下本書で「計算可能」や「決定可能」について述べる場合は，これと同じ意味と理解していただきたい．

「完全」や「不完全」という語と同様に，「決定可能」と「決定不能」という語も論理学において2つの異なった意味で使われている．文 A が形式体系 S で決定可能であるというのは，A あるいはその否定が S で証明可能であるときである．この意味の決定可能性は，文の性質であり，特定

の形式体系に関係している．他方，上で導入された意味の決定可能性は，文の性質ではなく，集合（列の集合や数の集合，あるいは列や数で表されるその他の対象の集合）の性質であって，形式体系とは関係ない．しかしながら，これら2つの意味の「決定可能」の間には次のような関連がある．すなわち，ある形式的理論が決定不能な文をもつことを示すために，決定不能な集合が存在するという事実が使えるのである．この結果を説明することが，本章の中心課題である．

数学的に定義可能な集合だけを扱う

ある集合が計算的枚挙可能かどうか，計算的決定可能かどうかを問うことは，その集合に形式的（数学的）な定義が与えられていなければ意味をなさない．例えば，英語の文全体の集合は決定可能だろうか？　この問いでは，「英語の文」が何を意味するかを明示する必要がある．すでに話されたり，書かれたりした文，もしくは将来話されるか，書かれるであろう文に話を限定するなら，ビリオン個（10億個）の記号を含む文が話されるとか，書かれるとかいうことは決して起こりえないので，文の長さに限界があることは明らかである．そして，列の有限集合はすべて決定可能だから，ビリオンより短い英文の集合は決定可能である．そう結論してよいだろうか？　否である．なぜならどの列がこの集合に**もどき**に属するのかが明確でなく，言い換えると，それはどんな集合も特定しないからである．英語のような自然言語は，論理学で研究される形式的言語とは対照的で，数学的な規則によって定義されるものではなく，実際の使用を通して規定されるものだ．そして，英語使用者が英文として認めるものが何なのかと考えはじめるやいなや，時間と場所による変動，話者間の相違，途中で話を変える場合，ある列が文であるかどうか誰にも判断できない場合などがあることに気づく．

これは，英文の集合が決定可能かどうかを問うことが無意味だと言って

いるわけではない．けれども，それが意味をなすためには，英語の理論的模型を，うまく掌握できる形式文法の形で導入する必要がある．それは，この言語の実際の使われ方と合致するような英文を組み立てるための法則をきちんと定めるものだ．するとこの形式文法は，無限個の列を英語の文として認めるものになるだろうから，文の集合が決定可能であるかどうかは自明でない問題になる．

論理学や数学で扱う対象となる列の集合は，最初に数学の言葉で定義されるものだ．例えば，ある公理から形式的推論規則を用いて導出される文全体の集合というように．そうすると，その集合が計算的枚挙可能か，あるいは決定可能かというのは，いつも意味のある問いとなる．

ゲーデル数化

はじめに，上で述べた数字列生成の手順を少し修正すれば，〔任意の有限個の記号からなる〕あらゆる列を生成できるようになることを見ておこう．最初に，1つの記号だけからなる列（たかだか有限個存在する）を生成し，次に，2つの記号からなる列（ふたたび，有限個存在する）を辞書式順序で規則的に生成して，以下同様に記号を長くしていくのだ．

例えば，ASCII[48] 表の 32 番から 126 番の記号を使うとしよう．それらの記号は“アルファベット順”に以下のようである．

空白，!，"，#，$，%，&，'，(，)，*，+，コンマ，−，ピリオド，/，
数字 0〜9，:，;，<，=，>，?，@，英字 A〜Z，[，¥，]，^，_，`，
英字 a〜z，|，}，~.

すべての列を生成するのは，まず 95 個の 1 記号列を生成することには

48） American Standard Code for Information Interchange（情報交換用米国標準コード）の略．

じまり，次に $95 \times 95 = 9025$ 個の 2 記号列を辞書式順序で（最初は 2 つの空白からなる列である）生成し，以下同様によりだんだんと長い列を生成する．

これは，数字列のみならず任意の列を数で表す方法を与えることになり，**ゲーデル数化**の例でもある．各列に割り当てる数は，すべての列を並べた中でのその列の順番と定めるのである．すると，95 個の 1 記号列にはゲーデル数 1 〜 95 が与えられ，それに続く 9025 個の 2 記号列はゲーデル数 96 〜 9120 をもつことになる．なお，数 0 は**空列**に割り当てるものとする．空列はひとつも記号を含まない列であるが，空集合同様に便利な数学概念だ．

このゲーデル数化は，任意の列を数で表す無数の方法のひとつにすぎないが，次の 2 つの重要な条件を満たしている．第一は，列が与えられたときに，そのゲーデル数を機械的に計算することができること．そのためには，次々と列を生成していき，当該の列が現れるまで数を数えて，その列が生じた順番が求めるゲーデル数である．第二は，ある数が与えられたときに，同様の計算で，それが何かの列のゲーデル数になるかどうかを判定し，もしそうであれば，それがどの列かを決定できることである．（上の特別なゲーデル数化に限って言えば，すべての数が何かの列のゲーデル数である．）これらの条件を満たしていれば，列の集合が計算的枚挙可能あるいは決定可能であることと，その集合に属する列のゲーデル数の集合が計算的枚挙可能あるいは決定可能であることが，同値になるのだ．

3.3 決定不能集合

2 つの基本的関係

計算的枚挙可能性と計算的決定可能性の間には，これらの概念についての多くの考察において鍵となる 2 つの基本的関係が存在する．最初の基

本的関係は次のものである．

すべての計算的決定可能集合は計算的枚挙可能である．

これが成り立つ理由は，決定可能集合 E の列すべてを生成するように計算機をプログラムすることが次のようにしてできるからである．まず，すべての列を計算機の内部で生成し，それが E に入ることが示されれば出力し，それが E に入らないなら捨てることにする．

じつは，もし集合が決定可能であるなら，ふつうはもっと単純で直接的な方法で，その要素を生成することができる．例えば，数字列全部を生成する際には，あらゆる記号列を順次生成してそこから数字列を選びだすのではなく，記号 0 ～ 9 だけからなる列を，0 ではじまる列（1 記号列の 0 を除く）を抜かして規則的に生成させればよい．ともあれ，上記の一般的な手順はつねに利用でき，そしてそれはすべての決定可能集合が計算的枚挙可能であることを示している．

さて，第二の基本的事実は，以下のようである．ただし，列の集合 E の補集合は，E に入らない列すべての集合である．

集合 E が計算的決定可能であるのは，E とその補集合の両方が計算的枚挙可能であるときであり，その場合に限る．

これを示すために，最初に次のことに注意する．E が計算的決定可能であるなら，E の補集合もそうであり，そうすると，第一の基本的事実から，E とその補集合が共に計算的枚挙可能であることになる．また，もし E とその補集合の両方が計算的枚挙可能であるなら，与えられた列が E に入るかどうかを計算機は次のようにして決定できる．まず，E の計算的枚挙における第 1 ステップ[49]と，E の補集合の計算可能枚挙の第 1 ステップを実行せよ．もしその列がいずれにも出力されなかったなら，両方の計算をも

う1ステップずつ実行せよ．ステップを進めていけば最終的には，どの列も E あるいは E の補集合に現れるはずで，計算機はそれが E に現れれば「イエス」あるいは E の補集合に現れれば「ノー」と答える．

決定不能性定理

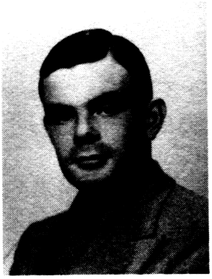
いよいよ計算的枚挙可能集合の理論の出発点となる事実を述べるときがきた．

決定不能性定理（チューリング，チャーチ） 計算的決定可能ではない計算的枚挙可能集合がある．

上の主張のような集合が存在することの証明やその例を見る前に，その一般的な性質について考察しておくことは価値があるだろう．E が決定可能でない計算的枚挙可能集合だとする．そのときには，その集合の列すべてを規則的に生成するアルゴリズムがある．すると，もしも s が E の要素であるなら，s が現われるまで E の要素を生成していけば，s が E の要素であることを示すことは，少なくとも理論上可能である．（かつて計算的枚挙可能集合は，**半決定可能**と呼ばれることがあった．）しかしながら，任意の列 s に対して，s が E に入るかどうかの情報をつねに与えるような機械的手順はない．つまり，もし s が E の要素でないなら，その判定が仮にできるとしても，それは一般化できない個別の推論によってのみできることである．計算的枚挙集合 E を使って第一不完全性定理を証明する際には，「k が E に入る」という形の言明に対して真偽を取り違えた判断をしないような形式体系 S において，その形の言明で決定できないものがあることがわかればよい．

49） 脚注 46 を見よ．

チューリングの決定不能性定理の証明


アラン・チューリング
(1912–1954)

チューリングは，「停止問題の再帰的非可解性」を立証することで，決定不能性定理を証明した．最初に，文献でしばしば用いられる伝統的な専門用語について注意しておく必要がある．「再帰的枚挙可能」あるいは「エフェクティブに枚挙可能」は，どちらも「計算的枚挙可能」の同義語である．「再帰的に非可解な問題」という言い方は，ひとつの“未解決問題”の意味での問題ではなく，ある種の問題の集まりを指している．再帰的に非可解な問題は，（自然数，列，あるいは数や列で表わされるその他の数学的な対象からなる）ある決定不能な集合 E によって与えられ，「a は E に入るか？」という形の問題の集まりが計算的に非可解になる．すなわち，この形のすべての問題に対して正しい返答（イエスかノー）を与えるような機械的手順はないということだ．

決定不能性定理と第一不完全性定理の間の関係を理解するだけなら，決定不能性定理の証明まで勉強する必要はないが，興味ある読者のために，チューリングの証明をここで紹介しておこう．

プログラミング言語を任意にひとつ選んでおく．Basic，C，Java，その他標準的言語なら何でもよく，それらは計算可能性理論の見地ではすべて同等である．プログラミング言語になじみのない読者は，それらはステップ毎の機械的な計算をいかに進めるかについての命令を表現するための言語であると考えていただければよい．ここでの計算は，まず扱う列を入力し，そして最後は何か列を出力して停止するか，もしくは永久に停止しないものとする．いま選んだ言語におけるプログラムは，それ自身記号列である．そして，プログラムの作成規則は，プログラム全体の集合が決定可能になるように定められている．とくに，1つの列を入力し，実行して1つの列を出力するか，永久に停止しないようなプログラム全体の集合も決

定可能になる．したがって，そのような（無限個の）プログラムを以下のように計算的に枚挙することができる．

$$P_0, P_1, P_2, \ldots$$

ここで，番号 i はプログラム P_i の**指数**であるという．

いま，P_i に，入力としてプログラムの指数 i（を表す数字列）を与えたとき，停止して，何かの値を出力するような i をすべて集めて，集合 K とする．ちょっと奇妙な定義をもつこの集合 K は，じつは計算的枚挙可能である．これを確かめるために，プログラム P_i たちについて知っておくべきことは，まずそれらの計算はステップ毎に進むことで，それゆえ

> 数(字列) k を入力して P_i で実行される計算は，高々 n ステップで終了する

という形の真なる言明の集合は決定可能になる[50]．これがどうして成り立つかというと，i, k, n が与えられたとき，まずプログラムを枚挙していって，プログラム P_i を生成し，そして入力 k に対して P_i の計算をはじめ，高々 n ステップだけ実行すればよいからだ．いま K の要素を計算的に列挙するためには，上に示した形の言明をすべて調べていって，$k = i$ で真なる言明を見つけたときに，i を K の要素のリストに加えればよいのだ．

よって，K は 計算的枚挙可能である．しかし，決定可能ではない．それを示すために，K が決定可能であるとしよう．すると，どんな入力 i に対しても，まず i が K に入るかどうかを調べる手順が定義できる．そこで，i が K に入らなければ，0 を出力するとしよう．そして，もし i が K に入るなら，P_i は入力 i に対して停止するので，その計算結果に，さらに最後にもう 1 つ余分な記号を加えて出力する．この手続きは，1 つの列を与え

50） 数とそれを表す数字列は，適宜同一視されている．第 **3.2** 節の最後の文を参照．

て1つの列を出力するようなプログラムPを定義しているから，あるmが存在して，PはP_mと一致していなければならない．ところが，PとP_mは入力mについての出力が違うので，両者は一致していない．以上から，Kは決定可能ではありえない．

チューリングの議論は，論理学では**対角線論法**として知られているものだ．最も基本的な形の対角線論法は次のようなものである．ある集合Aの2つの要素a, bについての関係$R(a, b)$が与えられている．いま，Aの要素aについての性質Pを$R(a, a)$が成り立たないことと定めると，性質Pはどんなaに対する性質R_aとも一致しない．ただし，$R_a(b)$は，$R(a, b)$が成り立つことと定義する．このとても単純な議論は，集合論の創始者であるドイツ人数学者ゲオルグ・カントール[51]によって19世紀の終わりに導入され，以来集合論や論理学でさまざまに改良されて使われている．ある形の対角線論法は，決定不能性定理や第一不完全性定理のほとんどの証明の根底に横たわっている．とくに，決定不能なゴールドバッハ類の言明の存在を導く証明については，多分すべてについてそれが言える．（ゴールドバッハ類の言明の定義については，2.1節を見よ．）

以下では，計算的枚挙可能であるが，決定不能な集合の例をさらに2つあげる．ひとつはポストによって定義された単純集合で，もうひとつは可解なディオファントス方程式の集合である．

ポストの単純集合

計算的枚挙可能集合の理論における先駆的な仕事をしたエミール・ポストは，計算的枚挙可能集合のなかで，ある意味できわめて決定不能度の高い種類のものを発見した．**単純集合**Aは，自然数の計算的枚挙可能集合

51) Georg Cantor (1845–1918) はサンクトペテルブルグ生まれのドイツ人数学者．ドイツ数学会初代会長．集合論の創始者で，対角線論法を集合の濃度の比較に用いた．ただし，カントール以前にもデュ・ボワ・レーモンが対角線論法を使っている．第2章の脚注16を参照．

であって，その補集合は無限集合であるけれども，計算的枚挙可能な無限集合をひとつとして部分集合に含まないものである．つまり，Aの外には無限個の数があるけれども，どんな機械的手順もそのうちの有限個を生成できるだけである．チューリングの証明で定義された集合Kは，単純ではない．なぜなら，私たちはどんな入力でも停止しないプログラムを容易に無限個作ることができるからである．

単純集合が存在することは簡単にわかることではない．ポストは，計算的枚挙可能集合の枚挙を使って，単純集合を構成する方法を示したが，第**8**章では，その約20年後に発見された単純集合の別の例を与える．それは**圧縮可能**な列の集合である．

ヒルベルトの第10問題とMRDP定理

1900年にダヴィット・ヒルベルトによって提出された23個の問題リストの10番目が，ディオファントス方程式（**2.1**節を見よ）が解をもつかどうかを判定するアルゴリズムを見いだす問題であった．1970年に，そのようなアルゴリズムはないことが，マティヤシェヴィッチ＝ロビンソン＝デイビス＝パットナム（MRDP）定理として知られる結果の帰結として確立した．

問題の単純化のために，私たちはディオファントス方程式の解を非負整数に制限する．（ディオファントス方程式が整数の解をもつかどうかの問題は，つねに別のディオファントス方程式が非負整数の解をもつかどうかの問題に還元できることが示される.）以下で，ディオファントス方程式$D(x_1, \ldots, x_n) = 0$が**可解**であるというのは，それが自然数の解$k_1, \ldots, k_n$をもつことと定める．

私たちはまず，可解なディオファントス方程式の集合が計算的枚挙可能であることを確認しておく．これを確かめるには，$k_1, \ldots, k_n$を数字列として，

$$D(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ は解 } x_1 = k_1, \ldots, x_n = k_n \text{ をもつ}$$

の形の文字列（真でも偽でもよい言明）の集合が決定可能で，それゆえ計算的枚挙可能であることに注目する．そして，すべての可解なディオファントス方程式を生成するには，まず上の形の列を生成していって，各列について，$x_1 = k_1, \ldots, x_n = k_n$ のときに $D(x_1, \ldots, x_n)$ が実際 0 になるか否かを調べればよい．もしそうであれば，$D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ を可解なディオファントス方程式のリストに入れるのだ．

同様に，ひとつのディオファントス方程式 $D(x_1, \ldots, x_n, y) = 0$ が与えられたとき，$y = k$ となる解が存在するような k の集合 E_D は，計算的枚挙可能である．これを確かめるには，未知数 y を数 k に置き換えた $D(x_1, \ldots, x_n, k) = 0$ の形の可解な方程式の集合を生成するようにして，そのような等式が見つかれば k を E_D の要素に加えればよい．ある D に対する E_D と一致する計算的枚挙可能集合は，**ディオファントス的**と呼ばれる．

MRDP 定理は，自然数の**すべて**の計算的枚挙可能集合がディオファントス的であるという主張である．決定可能でない計算的枚挙可能集合が存在することから，任意に与えたディオファントス方程式が解をもつかどうかを判定するアルゴリズムはないという結論が得られる．以上から，可解なディオファントス方程式の集合は決定可能でない計算的枚挙可能集合の例であり，したがって非可解なディオファントス方程式の集合は計算的枚挙可能でないとも言える．

MRDP 定理は，この定理が初等的算術で証明され，その証明が PA で形式化できるという事実によって，もうひとつの重要な帰結をもつ．2.1 節で非形式的に定義した（形式的な定義は補遺で与える）どんなゴールドバッハ類の言明 A に対しても，あるディオファントス方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ を組み立てて，A が真であることとその方程式が解をもたないことの同値性が PA で証明可能になるようにできる．とくに，「PA が無矛盾である」という言明に対してもこのような方程式を見つけることができる

のだ.

3.4 計算可能性と第一不完全性定理

形式体系

形式体系は，形式言語，推論規則の集合および公理の集合によって規定される．その言語における文全体の集合は，記号列の決定可能集合であると考えられる．（体系の言語における特定の文である）公理および推論規則に関しては，次のことを満たすように体系が定義されている必要がある．

形式体系の基本的性質 形式体系の定理の集合は計算的枚挙可能である．

例えば，1階理論に関しては，公理の集合（1階理論に共通した公理である「純粋に論理的な」公理を含む）は決定可能であって，そして唯一の推論規則（「A ならば B」と A から，B が結論される）をもつように定めることができる．このような体系における証明は，文の有限列 $A_1, \ldots, A_n$ であって，各 i について，A_i は公理であるか，あるいはそれより前に文 A_j と「A_j ならば A_i」が列に現れているものである．すると，証明の集合も決定可能であり，その結果，上記の基本的性質が成り立つ．なぜなら，体系の定理を計算的に枚挙するには，あらゆる列についてそれが証明になっているかどうかを調べ，そして証明になっている場合にその列の末尾にある文を出力するだけでよい．一般に，証明を規則的に生成し，その結論を取りだせば，定理が生成できるので，証明の集合が計算的枚挙可能であることが，上の基本的性質が成り立つための十分条件である．逆に，もし上の基本的性質が成り立つなら，体系における証明の集合が計算的枚挙可能になるように証明を定義することがつねに可能である.[52]

形式体系の基本的性質が意味することは，与えられた文 A に対する証明を機械的に検索し，その証明があるときには必ず最終的に見つけだすことができるということである．ただし，もしも A が体系の定理でないなら，証明の検索は永久に止まらないだろう．しかし，私たちが実際に定理を証明するときには，通常機械的な検索を行うのではなく，どうやって定理を証明すべきかについてある程度明確なアイデアによって導かれる．そこで，**定理自動証明**の研究分野では，証明の検索を，力ずくで機械的に行うのではなく，「知的に」行うように計算機をプログラムする試みがなされている．もっとも，自動化された「知的な」証明探索というのも，それが特定の規則の集合に従っているという意味においては，やはり機械的ではある．私たちが非形式に証明を探すときには，計算機が従うようにプログラムされうる種類の規則に従っているのかどうかわからないが，いずれにしても通常そのような規則を明確に述べることはできない．

もし体系の定理の集合が計算的枚挙可能であるだけではなく，さらに決定可能でもあるなら，その形式体系は**決定可能**であるという．完全な形式体系はつねに（この意味で）決定可能である．というのは，もしそれが矛盾しているなら，定理の集合は文全体の集合であり，そうでなければ，文 A が定理になるかどうかは，A か not-A が現れるまで体系の定理を枚挙することで判定できるからである．例えば，実数の初等理論（**2.3** 節を見よ）は完全であり，したがって決定可能でもある．（これは，その理論の言語における任意の文に対して，それが証明可能であるかどうかを判定するために実際的に使えるアルゴリズムがあるということではない．）また，完全ではないが，決定可能になる理論も存在する．

52) この主張は，「証明を定義する」を「決定可能な公理集合を定義する」と読み替えないと理解しにくい．

第一不完全性定理

形式体系 S は，以下の形の真なる言明をすべて証明できる程度の算術を含んでいるものとする．

$$D(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ が解 } x_1 = k_1, \ldots, x_n = k_n \text{ をもつ．}$$

このような真なる言明を証明することに，大した算術は必要ない．自然数の加減算と乗算が行え，＝の論理が扱えればよい．

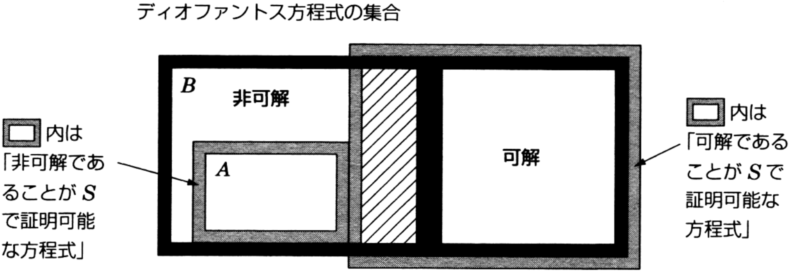
ここで，S の定理で以下の形のものを考えよう．

$$D(x_1, \ldots, x_n) = 0 \text{ が解をもたない．}$$

もし S が無矛盾なら，そのような S の定理はすべて真である．なぜなら，もし方程式が解をもっているなら，S についての冒頭の仮定によって，そのことが S で証明可能であるから，この方程式が解をもっていないことも S で証明可能であるはずがない．したがって，解をもたないことが S で証明可能である方程式の集合は，実際に解をもっていない方程式の集合の計算的枚挙可能な部分集合である．けれども，実際に解をもっていない方程式の集合は計算的枚挙可能では**ない**から，解をもたない方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ で，その事実が S で証明可能でないものが無限個存在することになる．そして，もしさらに S を Σ 健全であると仮定すれば，「ディオファントス方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ が少なくとも 1 つの解をもつ」という形の**偽なる**言明を S が証明することはないから，解をもつかもたないか S で判定できないような方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ が無限個存在することになる．

私たちは，もっと強い言明を得ることができる．解をもたないことが S で証明可能である方程式の集合 A は，解をもたない方程式の集合 B の計算的枚挙可能な部分集合である．もし A に属さない B の要素の集合 $B \setminus A$ が計算的枚挙可能集合だったとしたら，B は 2 つの計算的枚挙可能集合

第一不完全性定理のまとめ



・Aは計算的枚挙可能である．Bは計算的枚挙可能でないから，$B\backslash A$（集合Bから集合Aを除いた差集合）も計算的枚挙可能ではない．とくに，$B\backslash A$は無限集合．ただし，$B\backslash A$は▨と一致しているかもしれない．

・SがΣ健全であれば，非可解な方程式が解をもつことを証明しない．すなわち，▨が空となる．したがって，$B\backslash A$に属する方程式については可解性も非可解性も証明されない．

の和集合であって，したがってそれ自身計算的枚挙可能集合になるだろう．かくして，「ディオファントス方程式$D(x_1, . . . , x_n)=0$が解をもたない」という形の真なる言明で，S で証明可能でないもの全体の集合は無限というだけでなく，計算的枚挙可能ではないことになる．

計算可能性理論に基づくこの形の第一不完全性定理は，不完全性の証明にとって自己言及文（の算術的形式化）の使用が本質的に必要なものではないことを示している．実際この証明においては，Sが自己言及を形式化できるという仮定を置いていない．もし私たちが不完全性を示したいだけなら，Sの内容と構成は，ある程度の初等算術を含むこと以外，本質的ではない．とくに，Sが1階理論であるか，あるいは2階論理と呼ばれるものを使用するかなどは，Sが形式体系の基本的性質を満たす限り，何ら違いを生じない．

同じ議論は，可解なディオファントス方程式の集合の代わりに，どんな

計算的枚挙可能かつ決定不能な集合 E を用いても行える．ただし一見明白でないことは，どんな計算的枚挙可能な E に対しても，「k が E に入る」という形の言明は算術の言語で定式化でき，そしてこのような言明で真であるものはすべて，算術の基本的原理に基づいて証明できることである．これが実際に成り立つことを確認するためには，（チューリング機械のような）計算模型の形式仕様を必要とする．そして，第一不完全性定理の証明でゲーデルが用いた構文論の算術化と似た，計算言語の算術化も用いる必要がある．E として可解なディオファントス方程式の集合を使用することは，構文論の算術化を必要せずに，単純な算術的言明だけで議論がすむという利点がある．

この議論を通して得られる第一不完全性定理のバージョンは，ゲーデルの原形と同じ強さであり，体系 S が Σ 健全である（偽のゴールドバッハ類の言明を証明しない）と仮定しておく必要がある．それは「ディオファントス方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ が少なくとも 1 つの解をもつ」という形の偽なる言明を S が証明しないと仮定することと同値でもある．ある計算的枚挙可能で決定不可能な集合 E に対して，「n が E に入る」という形の言明のすべてを無矛盾な体系が決定することは，それが無限に多くの言明について真偽を取り違えて判定してよければ，実際ありうることだ[53]．しかし，非可解なディオファントス方程式の集合に限って言えば，（ある程度の算術を含む）無矛盾な体系が「ディオファントス方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ が少なくとも 1 つの解をもつ」という形の言明すべてを判定することはない．なぜなら，決定不能なロッサー文（2.7 節を見よ）がそのような形の文と同値になっているからである．

いま，ポストの意味の単純集合 E を 1 つ選ぶとしよう．すると，「k が E に入らない」という形の言明で，真となるものは無限個存在するが，S

53） 例えば，E を PA で証明される文のゲーデル数の集合とすれば，計算的枚挙可能だが決定不可能である．このとき，PA + not-$\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$ は無矛盾な体系だが，すべての文のゲーデル数 n に対して，「n が E に入る」を証明する．

が証明できるのは有限個しかない．私たちはさらにこれを，チャイティンの不完全性定理と関連させて，第 **8** 章で考察することにしよう．

計算可能性理論の基本的アイデアがもつ威力を顕す最後の例は，ゲーデルによって初めて注意が喚起された次の話題である．

本質的決定不能性と加速証明

上述の議論を少し違う視点で見てみよう．S が Σ 健全であるとすれば，ディオファントス方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ が少なくとも 1 つの解をもつことと，S が言明「ディオファントス方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ が少なくとも 1 つの解をもつ」を証明することは同値である．したがって，そのような S の定理の集合は決定可能であるはずはない．もしそうだったら，任意に与えたディオファントス方程式が解をもつか否かを，対応する言明が S で証明できるか否かを調べることによって判定するアルゴリズムが存在してしまうからだ．

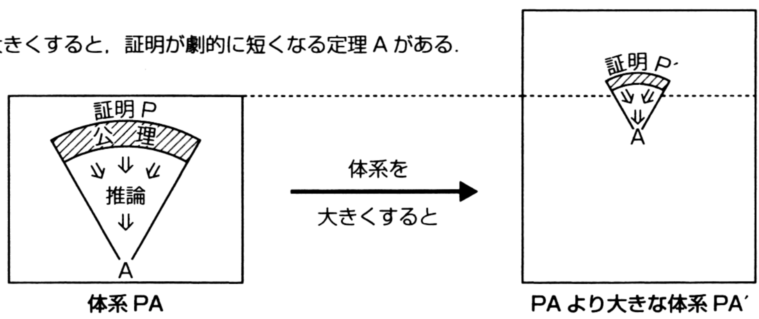
これから，とくに PA や，PA を含んでいる（PA の**拡張**となる）Σ 健全な理論はすべて決定不能である．この議論の修正によって，じつは PA のすべての無矛盾な拡張が決定不能であることも示される．このとき，PA は**本質的に決定不能**であるという．

理論 T が決定不能であることを証明することは，それが不完全であることを証明する別の方法になる．というのは，前にも注意したように，完全な形式体系は決定可能だからである．さて，T は本質的に決定不能であるとする．そして A を T で決定不能な文であるとしよう．さらに，T には“否定(not)”と“または(or)”の論理が組みこまれているとする．このとき，M を“$T' = T + A$ の定理で，T の定理でないものの集合”とすると，M は計算的枚挙可能ではないことがわかる．なぜなら，任意の文 B について，文「A または B」が（T' の定理ではあるが）M の要素になることと，「A または B」が T の定理でないことは同値であり，したがって B

が $T+\text{not-}A$ の定理ではないこととも同値である．よって，もし M が計算的枚挙可能であるなら，$T+\text{not-}A$ の非定理の集合も計算的枚挙可能であり，それは $T+\text{not-}A$ が決定可能であることを意味するので，これは私たちの 2 つの仮定，A が T で決定不能であることと，T のすべての無矛盾な拡張が決定不能であることに矛盾する．

前の段落での議論は，T で証明できず，$T+A$ で証明可能になる新しい定理の豊富さについて述べたものだ．さらに本質的決定不能性は，T の定理でもある $T+A$ の定理に関して，簡単に示せるが，決して自明ではない帰結も導く．PA で決定不能なひとつの言明を加えて，PA を拡張した理論を PA′とする．PA の定理について，それらが PA′でどう証明できるかを考えてみると，PA のいくつかの定理は PA′ではもっと効率よく証明できるようになるだろうか，つまり PA で見つかるどんな証明よりも短い証明が PA′にあるということが必ず言えるだろうか？　ここで，より短い証明というのは，より小さなゲーデル数をもつことだとしておいてもよい．答えはイエスである．そして，実のところ，PA′では「きわめて」短い証明をもつ PA の定理が必ず存在するのだ．例えば，PA における定理 A に対する最短の証明の長さを p として，PA′でのその最短の証明の長さを p' とした場合，$10^{1000}\times p'<p$ となる定理 A があり，さらに $2^{p'}<p$ などとなる定理 A もある．実際，自然数から自然数へのいかなる計算可能関数 f に対しても，$f(p')<p$ となる定理 A が存在するのである．（ゲーデルは，

体系を大きくすると，証明が劇的に短くなる定理 A がある．



この種の結果について述べた最初の人で，それは1936年のことである.）

これを背理法によって確かめるために，ある計算可能関数fが存在して，PAの定理Aで$f(p')<p$となるものはないと仮定しよう．このとき，任意のAについて，もしAがPA′において長さnの証明をもっているとすれば，AがPAの定理であることと，AがPAにおいて$f(n)$以下の長さの証明をもつこととは同値である．これは，PAの定理でないPA′の定理を計算的に枚挙する手続きがあることを意味しており，PAの本質的決定不可能性に反するものである.

4. 不完全性はどこにでも

4.1 数学の外の不完全性定理

不完全性定理は，形式体系の無矛盾性と完全性についての定理である．しかし序章でも述べたように，「矛盾する」「矛盾しない」「完全である」「完全でない」そして「体系（システム）」といった言葉は，論理学において特定の技術的な意味で用いられるばかりではなく，日常言語においても多様な意味で使われている．そのため，不完全性定理には数学の外に無数の応用例があると考えられたとしても不思議はない．

いくつかの例をみてみよう．

— 信心深い人々は，あらゆる疑問に対する答えが聖書や彼らの使う教典か何かに書かれていると言い張る．そうだとしたら聖書は完全な体系であるはずなので，ゲーデルの定理はそのような言い分が成り立たないことを示しているようにみえる．およそ宗教というものは，みんな「これが最終の解答リストだ」と主張するものなので，どの宗教にも同じことが当てはまるだろう．

— ゲーデルが立証したように，すべての無矛盾な形式体系は不完全であり，またすべての完全な形式体系は矛盾している．アメリカ

> 合衆国憲法は，曲がりなりにも形式的体系である．それで設立者は矛盾より不完全を選択し，その不完全性のギャップを埋めるために司法府があるのだ．

> — ゲーデルは，どんな公理系も不完全であるか，あるいは矛盾していることを示した．然るに，アイン・ランド(54)の客観主義哲学が公理と命題の体系であると主張するならば，その2つの状態のひとつが当てはまらなくてはならない．

これらはどれも，不完全性定理における体系はある程度の算術を含んでいなければならないという本質的な条件を落とすことで，定理を誤用している．この条件を満たさずに済むなら，完全で無矛盾な形式体系はたくさんある．また，もしこの条件を念頭においていれば，上の例のような不完全性定理の間違った応用は，そう安易に思い浮かぶこともないだろう．聖書も，合衆国憲法も，またアイン・ランドの哲学も，そこから算術の定理が湧き出るとは自然には考えられないからだ．

不完全性定理は，算術の公理系 PA や公理的集合論 ZFC のような形式体系を扱う数学の定理である．形式体系を規定するのは，形式言語，そしてその言語における公理の集合，それから公理から定理の集合を導く推論規則の集合である．まず，聖書は形式体系ではない．少し詳しく述べるなら，それはまず形式言語をもたない．ラテン語，英語，日本語，スワヒリ語，ギリシャ語，あるいは他のどんな言語で書かれようとも，それは自然言語の文章の集まりである．そして，それは公理も，推論規則も，定理ももっていない．聖書に書かれていることから何かが導かれるかどうかは，数学的な問題ではなく，思慮分別，解釈，信仰，立場の問題である．憲法

54) Ayn Rand (1905–1982) はロシアに生まれ，革命後にアメリカに移住した女性作家．個人主義と競争社会を肯定する客観主義思想を広め，アメリカの政治家，知識人に大きな影響を与えた．主著『水源』（映画『摩天楼』の原作），『肩をすくめるアトラス』．

とアイン・ランドの哲学についても同様である．これらのテキストから何が導け，何が導けないかを判断するのは，数学者やコンピュータの仕事ではなく，神学者，信奉者，最高裁，そして普通の読み手の務めである．読み手は，テキストをどう解釈するかしばしば自分で決定しなければならないし，そのとき頼れる形式的推論規則もない．

だから定理の誤用に気づくには，答えは自明だけれども，「聖書（や憲法など）は形式体系か？」と尋ねてみるだけでいい．もちろん形式体系ではない．まったくそれとは違う．形式体系の数学的な概念をわきに置いて，日常感覚で「形式」とか「体系（システム）」という語を使うなら，憲法は「曲がりなりに」形式的体系であると言うことも確かにできよう．日常言語の見地では，憲法はたくさんの形式的な言葉を含んでいて，どちらかと言えばシステマティックに見える．けれども，憲法に対して，形式的に定義された言語，公理，推論規則があると真面目に主張する人はいないだろう．だから，不完全性定理は，憲法，聖書，アイン・ランドの哲学などには当てはまらないのである．

思想，法律，哲学などさまざまなシステムがあたかも形式体系を構成するかのような話をしなくても，無矛盾性と完全性という形式的概念の類似物をそれらに当てはめることはできるかもしれない．聖書が，論理学で使われるのと類似した感覚で完全であるとは，次のことを意味することになるだろう．聖書講読の文脈で意味をなす言明は，すべて聖書によって合理性に決定されている．つまり，その言明またはその否定が，聖書において明示的にかあるいは暗黙に述べられているということだ．もし聖書がこの意味で完全かという問題を提起するなら，答えはまたかなり明白である．それは完全ではない．例えば，モーゼが彼の5歳の誕生日にくしゃみをしたかどうか尋ねることは，聖書講読の文脈で意味をなすが，これに関する情報は聖書の中に見つけることができない．それゆえ，聖書は不完全だ．同様に，憲法にはピエロの衣装で議会に出ることが許されるかどうか書いていないから，不完全だ．また，火星の上に生命があるか否かを尋ねるこ

とは客観主義の文脈で意味をなすけれども，火星の上に生命があるか否かを導きだすことができないので，客観主義のアイン・ランドの哲学は不完全だ．これらの「システム」がこういう意味で不完全なことを言うのに，ゲーデルの定理は必要ない．当然，どんな教義，理論，あるいは法律もこれと類似の意味で不完全である．こんな当たり前の考察は，先に引用した意見の中ではおそらく問題にされていない．けれども，聖書，憲法，客観主義などの論議において，不完全性定理がそれ以上に本質的で興味深い意味で使用できるわけではない．

同様の批評は，ジョン・エドワーズが電子雑誌『セタラス・パラバス *Ceteris Paribus*』(55) に載せた次の意見にも当てはまる．

> 生きるための諸法則は，格言に含まれるような文化習慣であろうと，許される行為や手続きを規定した法律や規則や政策であろうと，論理体系の公理と見なすことができる．その場合，起こりうる行為は，〔論理学でいう〕「言明」に相当するものと考えられる．そして，もしその行為が法則のシステムの中で許可されるか，合法的か，あるいは承認されることが示されれば，それに対応する言明は証明されたと考える．逆に，それが禁止されるか，非合法か，あるいは否認されることが示されれば，それは反証されたと考える．ゲーデルの定理によって，どんな法則システムも必ず矛盾しているか不完全であるというのは，なるほどさもありなんと思わないか？

生きるための法則などを論理体系の公理と「見なす」ことは，まあ大雑把に言えば，どんなものも他のどんなものとでも見なせるから，文句をつけないでおく．さらに，いろいろなものを「公理」や「定理」を伴った「システム」と見ることについても，そのように見ることを多くの人が自

55) 題名は「他の条件が同じならば」の意のラテン語で，経済学などでよく用いられる用語．この電子雑誌は総合文芸誌で月2回発行されていたが，現在は不明．

然で納得のいくものと思っていることは事実上確かである．といって，そのようなアナロジーや比喩によって，どんな結論が導きだされるか，またどんな重要な主張が支持されるかは，別の問題だ．上に引用した文章で示された結論は，法則システムは「矛盾しているか，不完全である」しかないということだった．ここで「矛盾している」とか「不完全である」とかが何を意味するかの説明が与えられたなら，法体系や生きるための法則などが矛盾していて，なおかつ不完全であり，そして今後もそのままであろうことは，ちょっと考えればわかる事実だろう．言い換えれば，例えば法体系に関しては，法律が何も語らない行為や手続きが必ずあるし，また法律上矛盾する立場が生じうる行為や手続きも必ずあるというわけだ．それゆえ，法廷と裁判が必要なのである．ゲーデルの定理への言及は，この単純な事実に美辞麗句の飾り書きを加えているだけである．

4.2 「人間の思考」と不完全性定理

不完全性定理が適用できるとよく考えられる「システム」の中でもとくに際立った例は，「人間の思考」だ．これは「人間の心」，「人間の脳」，「人間の知性」といってもよいが，ここではとりあえず「人間の思考」というタームを使おう[56]．するとまずは，この定理を聖書，憲法，アイン・ランドの哲学に応用しようとしたときと同じ一般的なコメントが当てはまる．すなわち，「人間の思考」には，形式的に定義される言語，公理，推論規則のようなものがないので，不完全性定理を「人間の思考」に当てはめて語ることには意味がないということだ．しかしながら，不完全性定理をこの特別な“応用”に誘う要因がいくつかあって，それがこの定理が「人間

56) ここに掲げられた「人間の思考」の同義語は，本文中でそれぞれ若干異なるニュアンスでも使われている．簡単にそれらの関係を述べれば，「心」は脳の機能または機能面から見た脳，「思考」は心の活動ないしそのシステム，「知性」は思考の応用力である．

の思考」に当てはまるという見方に一定の魅力を与えている．このような見方のひとつは，次のような言葉で表現される．

> 人が論理的であろうと試みる限りにおいて，その思考は形式体系を形成し，そしてそれは必ずゲーデルの定理によって縛られる．

ここで「論理的であろうと試みる」ことは，「どんな結論も，形式言語で記述された基本的前提の集合から形式論理的に帰結されるように論じる試み」だと言っていいだろう．ある程度狭く限定された領域の思考であれば，このような説明は確かに当てはまる．例えば，大きな数を因数分解してみて，「自然数 n が因数 m をもつ」という形の結論を得たとき，それは基本的な算術原理からの論理的帰結になっているはずだ．しかしながら，この結論に到達する方法は，基本原理から論理的法則を適用することだけに制限されるわけではなく，どんな数学的な方法を使ってもよい．因数分解に役立つのなら，お茶の葉で占うことだって悪いことではないのだ．というのは，「自然数 n が因数 m をもつ」という主張は，それが真であるか否か（したがってそれが基本原理の論理的帰結であるか否か）の検証が可能だからである．[57]「論理的であろうと試みる」をより厳密に解釈すれば，紙の上で長い割り算をするように，ある特定の形式推論規則を実際に素手で運用することだけでできるということかもしれない．それならば，私たちの思考が形式体系と深く結びつくと結論するのは確かに理にかなっているだろう．けれども，これらは典型的な知的活動ではない．もし「論理的であろうと試みる」ことが，「論理的」の日常的な意味のとおり，筋が通って，矛盾がなく，結論に飛躍しないといった試みを指すだけなら，私たちの思考に特別な関係をもつような形式体系を特定することなどできはしない．形式体系が研究され，応用されるのは，数学の文脈や計算機のプログラム

---

57) 大きな数の因数を見つけだすには一般に手間がかかるが，見つかった数が本当に因数であるか否かの検証は簡単にできることがこの説明の背景にある．

においてであって，政治討論や法廷論争においてではない．ましてや，スポーツ，科学，ニュース，あるいは天気についての論議は形式的であろうとなかろうと当てはまるものではないし，さらに日常生活の問題解決や実験室にも応用できない．できる限り計算機のように機械的に思考しようと努力しているときでも，「私たちの思考が形式体系を形成する」というのはせいぜい比喩にすぎない．

この関連でよくもちだされるのは，次のような考え方だ．まず，不完全性定理がうまく適用できるのは，数学的言明の証明について語るときだけであり，聖書の解釈や哲学・政治の論議などの文脈ではないことを認めておこう．それでも，人間は，数学の言明，とくに算術的な言明を証明する．「人間の思考」が算術的言明を証明しているとなると，もしそれが不完全性定理によって制約されないなどというなら，そのときは人間の数学的思考には何か本質的に計算不可能なものがあり，それがコンピュータや形式体系の限界を超えることを可能にしていると考えざるをえないのではないか？　あるいは人間の心に，精神的としか言えないような非物質的要素があるとも考えざるをえないのではないか？　このような結論は，それに反撥する人も少なくないが，同じく少なからぬ人に歓迎されてもいる．こういうことが，不完全性定理を「人間の思考」に応用する試みに誘いがちである．

ここで論じておきたいのは次のような視点だ．私たちが不完全性定理の「人間の思考」への適用について話をするときには，人間がスタートレック名物の海軍少佐データ[58]のような，ときどき「情動チップ」の影響を受けつつ，「陽電子頭脳」が頭の中でウィーンと回っているアンドロイドに近いか，あるいは逆にどんな機械装置も超えた根本的に精神的な創造物であるかは，まったく関係ないということだ．

人間の思考が不完全性定理の制約を受けるという議論において基本とな

58）データ少佐は，米国TVドラマ「新スタートレック」に登場するアンドロイド．

るべき前提は，算術について「何を人間の心が証明できるか」を私たちが明確にいえることである．これを前提とすれば，「人間に証明可能な」算術文全体の集合 M が計算的枚挙可能であるかどうかを問うことができる．もし M が計算的枚挙可能であるなら，「人間の心」はゲーデルの不完全性定理の適用を受け，そして（「人間の思考」が無矛盾であるとすれば），「人間に決定可能ではない」算術的言明があることになる．もし M が計算的枚挙可能でないなら，人間の思考はどんな形式体系の能力をも上回り，そしてその意味において，不完全性定理による制約を受けない．このような前提のもとでなら，M が計算的枚挙可能であるかどうかを問うことは挑戦的でかつ非常に重要な問題を提起し，その解決はとても興味深く，啓発的であることは疑いない．

けれども，「人間に証明可能な」算術的言明の集合 M は存在するのだろうか？　この仮定は一見して信じがたく，それを支持する根拠もほとんどない．現実の人間の心は，使える時間やエネルギーの限界といった多くの要因で当然制限される．だから「人間の心」による証明に対して何が「理論的に可能である」とか「原理的に可能である」とかを考えることになり，それには「人間に証明可能な」算術的言明について理論的な仕方で語るための「人間の心」の働きの理論や原理が前提となる．これがどんな理論や原理の集まりであるかはまったく判然としない．そして「人間の心」が多様性と可変性をもつという事実を考えれば，そのような理論が得られることはまずなさそうだ．

では，「人間の心」が何を証明したかという問いについて考えてみよう．ある人間の心は無限集合論を無意味であるとして拒否するのに対して，他のものは，それを大いに説得力があって，直観的であると思う．そこには，この理論に対するある種の無矛盾性言明が証明されているどうか，つまりこの理論が受けいれられるようになっているかどうかについての，明白な意見の食い違いがある．「人間の心に証明できる」ものが何かという問題は，何が証明であるかないかについての合意を前提とする．可能な証明全

体を特徴づける理論がないばかりか，既存の議論が確かに証明になるか否かについての一般的合意すらない現状では，何か形式的に与えた推論方法で「人間の心に証明できる」ものが何かを問うことができるだけである．しかし，その場合には人間の心はもはや本質ではなく，その特定の形式体系で何が証明できるかが問題である．

可変性に関連した話として，構成的数学という分野を支える仕事をしたエレット・ビショップ(59)が「構成的数学が標準となる日が必ずくる」と語ったことがある．人間の心について私たちが知っている事柄から，そのようなことが起きることも確かに考えられうる．実のところ，将来受け入れられる数学の標準が，ビショップの構成的数学さえも部分的に不適当であると見なすものになる可能性すら，排除すべき理由はいまのところひとつもない．逆に，今日誰にも自明とは考えられないきわめて非構成的な原理が，なにがしかの方法で確信できるようになることも同じく考えられる．この意味では，定理を証明する「人間の心の能力」にはまったく制限がないかもしれない．算術的に健全でない原理が明白と見なされるようになるのだから，偽なる言明が証明できると見なされる可能性を排除する根拠も当然ない．

算術の定理を証明する際に，人間の心で現実にあるいは可能的にでも達成できる範囲がどこまでかという問題は，人間がどれだけ高くジャンプできるかとか，あるいは5分間でいくつホットドッグを食べられるか，あるいはπの小数展開を何桁まで記憶できるか，あるいは人類がどれくらい遠くまで宇宙旅行できるかといった問題とは違っている．それは例えば，まったく周囲に嫌悪感をもたらすことなく，5分間でいくつのホットドッグを食べられるかといった問題にまだしも近いような，異なる社会，異なった時代，異なる人々によって，異なる答えが与えられるであろう問題で

59) Errett Bishop (1928–1983) は当初作用環研究者として，カリフォルニア大学バークレー校で教鞭をとった．1960年代後半サンディエゴ校に移り，直観主義を受け継ぐ構成主義を打ちだし，超準解析への批判もおこなった．

ある.「人間の心」によって証明できることは何かという理論的大問題をはっきりと提示するのに必要な手段を，要するに私たちはもっていないのだ．この点については，心の哲学におけるゲーデル流の議論に関連して，第6章でふたたび考察する.

不完全性定理を人間の思考に応用するもうひとつのアプローチは，日常の非形式的推論や数学における決定不能な言明を探すのではなく，ゲーデルの第一不完全性定理の証明を非数学的文脈で遂行しうると主張するものである．この主張を次に考察しよう.

4.3 一般化されたゲーデル文

数学的な一般化の例

第2章で述べたように，ゲーデルが発明した証明可能な不動点を用いる技術は，第一不完全性定理の証明に限らず，論理学における非常に多くの議論でその後利用されている．ひとつ例を述べよう.

形式体系の基本的な性質は，3.4節で強調したように，定理の集合が計算的枚挙可能になることである．いまこの性質を要求しないで，形式言語，公理の集合と推論規則を維持するなら，形式的理論を拡大した概念が得られ，それも論理学で研究されている．この一般化された意味での「理論」は，その理論における証明であるか否かを判定する方法がないかもしれないのだから，数学的知識として必ずしも役立つとは言えない．しかし，この概念は論理学的な研究においてはとても有用である.

このようなかなり自由な「理論」の概念を使えば，理論 T を“PA に「ディオファントス方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ が解をもたない」という形の真なる言明をすべて公理として加えて得られるもの”として定義することができる．この形式の真なる言明のゲーデル数の集合は算術の言語で定義できるから，不動点構成法を用いて，算術的言明 A が真であることと，

それが T で証明可能でないことの同値性が PA で証明できるような A を定式化することができる.（この A はゴールドバッハ類の言明にはならないはずだ.）もし A が偽であるなら，T で証明可能になるが，T のすべての公理は真であるから，これは不可能である．それで，A は実のところ真になり，T で証明不可能である.[60]

このようにして，ゲーデルの証明で使われた不動点構成法を拡張して，(狭義の) 形式体系とはならない多くの理論がなお不完全であることを示すことができる．しかし，例えば，PA にすべての真なる算術文を公理として加えた理論を考えてみよう．その理論 T（「真の算術」として知られる）は明らかに完全である．この場合，不完全性の議論はどこで破綻しているのか？　その破綻は，T に対する「ゲーデル文」がもはや構成できないことからくる．というのも，(まさしくこの議論自体が示すように)，“真の算術文のゲーデル数である”という性質は，算術の言語で定義できないからだ.

非数学的な一般化の例

いま，不完全性定理の主張を非数学的システムに適用しようとする代わりに，そのようなシステムに対する「ゲーデル文」に相当するものを定式化して，ゲーデルの定理の証明をまねしてみたらどうだろうか？　例えば，次のような文が考えられる.

— この文の真理は，聖書をもとにして確証できない.

— この文の真理は，憲法のどこからも推論できない.

60) ここでの議論は，PA で証明される言明は真である（すなわち，PA は健全である）という素朴な前提の下で行われている．このとき，PA に真なる公理を加えてできる体系 T も健全である．いま，不動点構成法で作られた言明 A は，それ自身が T で証明可能でないことと同値であることが PA で証明されており，したがってその同値性は真である．よって，A が偽であるなら，A は T で証明できることになり，T の健全性に反する.

— この文は，アイン・ランドの哲学をもとに真であることを示せない．

これらの怪しげな陳述の検討に入る前に，それらに対してよく提起されるある種の反論を片付けておく必要がある．それは，「この文」という語句が，その語句を含む文を指示する使用法についてだ．このような自己言及が，いろいろな理由で疑わしいと思われてきた．とくに，その文を理解しようとするときに無限退行に陥るという非難が浴びせられた．もし「この」が哲学において伝統的に「命題」と呼ばれるもの，つまり意味ある文の内容を示すとするなら，この非難は当たっている．けれども上の言明では，オリジナルのゲーデル文の骨組みと同様に，「この文」は構文的対象である記号列についての言及で，「この文」が何を指すかを確定させるのには無限退行は必要ない．ゲーデル文の場合のように，置換もしくは「クワイン化」（2.7 節を見よ）のような，構文的な操作の使用によって「この文」という語句を除去すれば，この事実ははっきりできる．あるいはまた，最初の文を次のものと置き換えるだけでもよい．

文 P の真理は聖書をもとにして確証できない．

但し，

P =「文 P の真理は聖書をもとにして確証できない」．

この明確な定義は，特定の記号列を示すために，単にひとつの記号を導入しているだけだから，論理学や数学のほかの定義に比べても問題のあるようなところはまったくない．（とくに，P の定義は，右辺の記号列が何らかの意味をもつことを前提としていない．）したがって今後は，「この文」という表現を含んでいる，短い自己言及文を使って話を進める．

さて，上で提示された 3 つの「ゲーデル文」を見て，私たちの初期反応は，それらを問題なく真であると見なすことだろう．だからといって，

聖書，憲法，あるいはアイン・ランドの哲学のいずれについても何らかの不備を表しているとは思えない．どのみち，これらの言明が聖書講読などの文脈で意味をなしうるかどうかは定かではない．他方，PA のゲーデル文は，それらとは異なる事例である．PA のゲーデル文はそれ自身算術文であり，そしてその決定に PA が無力であることは PA の数学的能力の不足を示す．憲法が「この文の真理は憲法のどこからも推論できない」ということの真理を確立するのに十分でないこと（そうだと仮定して）は，そもそも論理パズルの議論の道具として作られたわけではない憲法にとって何か欠陥があることを示したことにはならない．

しかしながら，3 つの言明は一見して思うほど問題がないものではない．というのは，次のようなさらに広い意味の「ゲーデル文」を定式化する方向に話を進めることもできるからだ．

> この文が真であることは，どんな健全な推論をつかっても示せない．

もしもこの文が偽であるなら，健全な推論を使って真であることが示せる．しかし健全な推論であれば，偽の文が真であるとは立証できない．だから，この文は真であり，そしてこの結論はまっとうな推論によって導かれている．しかしそうなると，その文は偽である．それなら，この文は単に無意味として片付けられるか？　そうだとしたら，確かにこの文はどんな種類の健全な推論を使っても真であると示されることはないのだが……。

この議論の変形としてよく出回っているのは，誰か特定の人に対する「ゲーデル文」の存在を言おうとするもので，その人以外には問題なく真であると考えられる文になるものだ．例えば，

> ジョンはこの文が真であると自分を納得させることは永久にできないだろう．

そしてもちろん，「真であることを示せない」という形にすれば，古典的

なウソつきの逆理に近づく．つまり，次のウソつき文

「この文は偽である」

が真であるのは，それが偽であるときで，またそのときに限るというものである．

ウソつき文や上で述べた種々の〔広い意味の〕「ゲーデル文」を取り巻く多くの議論とアイデアについては，この本ではこれ以上論じない．しかし，次の考察は重要である．不完全性定理が数学の定理であるのは，まさに「真偽」と「証明可能性」という重要な概念が数学的に定義可能だからである．非数学的な「ゲーデル文」やウソつき文は，以下のようなことについて長い（あるいは果てしない）論議を喚び起こす．証明とは何か，真なる言明とは，健全な論証とは何か，何かが真であると示すこととは，何かが納得できるとは，何かを信じるとは，意味ある言明とは何か，等々．形式言語の文についての算術的に（もっと一般には，数学的に）定義可能な性質の不動点と，上述のさまざまな文の間には形式的類似性はあるが，後者では不完全性定理やその証明の何らかの応用を扱っているわけではなく，不完全性定理に触発されて生まれただけの考えや謎を扱っているのだ．「ジョンはこの言明が真であるとは永久に認めないであろう」のような言明が人々の心に喚び起こしやすい愉快な混乱が，理論的にあるいは哲学的に重要性をもっているかどうかは議論の余地のある問題である．

4.4 不完全性と TOE（万物理論）

TOE というのは，万物の仮説理論（the hypothetical Theory of Everything）のことであり，それは時に理論物理学の究極原理あるいは聖杯であると考えられている．不完全性定理は，例えば高名な物理学者フリーマン・ダイソン[(61)]やスティーヴン・ホーキング[(62)]によって，そのような万物理論はないと

いう見解を支持するために用いられている．

『ニューヨーク・レビュー・オブ・ブックス』の書評の中で，ダイソンは次のように書いた．

> 私がなぜ科学が無尽蔵であると信じるかというもうひとつの理由はゲーデルの定理である．数学者クルト・ゲーデルは 1931 年にその定理を発見し，証明を与えた．この定理は，数学をするための規則の有限集合をどう与えても，決定不能な言明，すなわちこれらの規則を用いて証明も反証もできないような数学的言明があると述べている．ゲーデルは，論理学と算術の通常の規則を使うことでは，真とも偽とも証明できないような決定不能な言明の例を与えた．彼の定理は，純粋数学が無尽蔵であることを意味する．いくらたくさんの問題を解決しても，既存の規則の中では解決できない問題がつねに他にあるということだ．いま私は，ゲーデルの定理により，物理学も無尽蔵であると主張する．物理学の法則は規則の有限集合であって，数学をするための規則を含んでいるから，ゲーデルの定理はそれに当てはまる．物理学の基礎方程式の領域でさえ，私たちの知識がつねに不完全だろうことをこの定理は含意する．

“理論物理学の形式体系”——そのような論理学上の“理論”が作りだせるとすれば——は，算術の部分を含むことによって，不完全性定理の適用を受けるだろうと考えることは合理的に思われる．しかしながら，**2.3** 節で強調したように，ゲーデルの定理はただ，理論の算術部分に不完全性があることを教えてくれるだけである．物理学の基礎方程式群からなる体

61）Freeman Dyson（1923 年イギリス生まれ）は，整数論から理論物理，天文学まで幅広い分野で研究業績があり，科学啓蒙の優れた文筆家としても知られる．プリンストン高等研究所名誉教授．

62）Stephen Hawking（1942 年生）はケンブリッジ大学の理論物理学者．ペンローズとの共同研究がある．「車椅子の物理学者」として知られる．

系は，それがどんなものであれ，実際にすべての算術的言明を決定することはできない．しかし，それが物理世界の記述として完全かどうか，そのような場合の“完全性”が何を意味するのかは，不完全性定理が私たちに教えてくれるものではない〔原注 『ニューヨーク・レビュー・オブ・ブックス』誌への手紙（2004 年 7 月 15 日）でソロモン・フェファーマンによってなされた同様の批判に対して，ダイソンは丁重に応え，この点の過ちを認めている〕．

不完全性をもちだした別の例として，次のようなものもある．

> 世界には簡単に定量化も計算もできないさまざまな性質が無数にある．例えば，美しさと醜悪，幸福と苦難，直観と霊感，同情と愛，など．これらは，どんな万物の数学理論もまったく把握できない．科学的な理論は数学的体系を基盤として作られるから，不完全性は私たちのすべての科学知識にも継承されるはずだ．不完全性定理は，科学の進歩がどれほど成し遂げられようと，科学が自然界を完全に解明することは原理的にできないことを明らかにする．

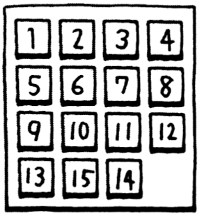
ここで，「科学的な理論は数学的な体系を基盤として作られるから，不完全性は私たちのすべての科学知識にも継承されるはずだ」というのは，不完全性定理の実際の内容との関連がきわめて希薄である．不完全性定理における何ものも，私たちが星とゴーストと猫のすべてをひとつに丸めこんだ完全な理論を作りだす可能性を排除しない．もちろん，星とゴーストと猫について語ることが自然数についての言明と解釈できない限りにおいてである．科学が美しさと醜さ，直観と霊感などについてすべてを解明すると期待することはできないということは，ゲーデルの定理を必要とせず，ゲーデルの定理によって支持されもしない合理的な見解である．

スティーヴン・ホーキングも，「ゲーデルと物理学の終焉」という題の講演のなかで，ゲーデルの定理について以下のように言及している．

> ゲーデルの定理は，宇宙の理論を有限の原理で説明できるかという問題と，どう関連するだろうか？　ひとつの明白な関連はこうである．実証主義の科学哲学によれば，物理の理論は数理モデルである．だから，もし証明できない数学的結果があるなら，予測できない物理的問題がある．例えばゴールドバッハ予想について考えてみよう．偶数個の木ブロックが与えられたとき，あなたはそれらを，長方形に揃えられない２つの山に分けることがつねにできるだろうか？このとき，それぞれの山は素数個のブロックからなるわけだ．この問いに答えられないこともある種の不完全性ではあるけれど，それは私が意図するような予測不可能性ではない．なぜなら，どんな具体的な個数のブロックについても，有限回の試行で，それらが２つの素数に分けられるかどうかを決定することができるからである．しかしいまや，量子論と重力理論が一緒になって，古典的なニュートン理論にはなかった新しい要素が議論に持ち込まれた．科学哲学における従来の実証主義的観点では，物理の理論は理想的な数学モデルからなるプラトンの楽園に無銭で住み着いているようなものだ．すなわち，記述する宇宙に影響を与えることなく，モデルはいくらでも精密にでき，いくらでも情報を含むことができる．けれども私たちは，外部から宇宙を眺めている天使ではない．実際，私たちとモデルの両方とも，記述している宇宙の一部である．だから，物理理論は，ゲーデルの定理と同じように，自己言及的である．したがって，それは矛盾しているか，不完全であると予想することができよう．これまで私たちが手にした理論は，矛盾していて，かつ不完全なのであるが．

ここでの結論は，物理理論が「宇宙の一部」だという自明な意味で，物理理論が「自己言及的」ということであり，したがってゲーデルが自己言及的言明を使って彼の第一不完全性定理を証明したことを考えれば，物理理論は矛盾しているか，不完全であると予想できようというのだ．ふたた

び，不完全性定理との関連は，ここでもせいぜい霊感と比喩の範疇だ．他方ホーキングは，もうひとつの課題として，物理的実験結果の予測と算術の問題との関連にも簡単に触れている．104,729 個のブロックが与えられたとき，それらを長方形に揃える試みは成功するであろうか？　計算によって 104,729 が素数であることを示せるので，私たちはそのような試みはどれも成功しないだろうと結論する．あるいは，もう少し身近な例として，サム・ロイドが 1873 年に導入し，いまだ人気が高い「15 パズル」，15 個の正方形を上下左右にスライドさせてその上の数字を並べるパズルを考えてみよう．これは，発見的探索アルゴリズムをテストするときに，AI 研究者の間で長くお気に入りだった．ロイドは「15–14 問題」の解決のために 1,000 ドルの報奨金を提供した．これは，最後の 2 つの正方形だけを入れ替えるように，正方形を配置替えする問題である．しかし彼は，自分の金がもっていかれる危険はないことをよく知っていた．組合せ論的な議論で，その問題は解をもたないことがわかるからである．それで，彼は人々に問題に取りかからせておいて，そして自らは算術的推論に基づき，自信をもって最終結果（みんなが諦めること）を予測できた．



サム・ロイドの「15−14」問題

このような例は，算術の不完全性が，物質世界に対する記述の不完全性を引き起こすことを示しているだろうか？　いや，そうではない．では，あるディオファントス方程式 $D(x_1, . . . , x_n) = 0$ は解をもたないが，その事実を私たちの数学では証明できないとしよう．このとき，「方程式 $D(x_1, . . . , x_n) = 0$ の解を探す」と記述される物理的実験を行った結果を予測する根拠は何ももたないことになる．（このような実験は，人間が木ブロックを並べ替えたり，筆算をしたりすることでも，あるいはコンピュータがプログラムを実行することでもよい．）しかしながら，これは当該の物理系に対する私たちの記述が不完全であることを示すものではない．算術を用いて物

理の実験結果を予測することは，ある種の観察可能な性質に関して，ある種の現実的な物理系のふるまいに対するよいモデルを算術が提供するという前提に基づいている．（とくにそのような前提は，木ブロックのような物理的対象が一定の時間ある程度の安定性をもっていることや，算術を適用できないようにする巨視的なトンネル効果がないことや，卵は自然発生的にかごの中に出現したりはしないこと，などを意味する.）物理世界についての記述は，このような前提が正しいことを仮定するものだ．然るに，算術的言明の役割は，物理世界の記述を応用して物理系についての結論を導くために前提となるだけだ．

4.5 神学的応用

ゲーデルは，ときに自らを有神論者であると語っており，特定の教会には所属しなかったけれども，「合理的な神学」の可能性を信じていた．彼は「教会にではなく，宗教には，一般に信じられている以上の道理があると信じている」と述べたと文献 [Wang 87] には書かれている．しかし，ゲーデルの有神論が，世間的に認知されている有神論的宗教が表明しているようなものと一致するとは考えるべきでない．有神論の宗教には，普通人間とかかわりをもつような神あるいは神々がいて，それゆえに，神に祈り，神に感謝し，神に従い，さらに一般的には神と通じ合うことが意味をもつのだ．ゲーデルの「合理的な神学」は，このような事柄と関係していない．彼の未公開論文の中には，神の存在についての聖アンセルムスによる存在論的証明の改作があった．より正確には，その議論の結論は“神のような個体”が存在することである．ここで，xが「神のよう」であるとは，「xのすべての本性が肯定的であり，かつxはすべての肯定的な属性を本性としてもつこと」と定義される．「神のような」という言い方から明らかなように，ゲーデルの合理的神学の考えは福音主義的なものではなく，オス

カー・モルゲンシュテルンは次のように説明している [Dawson 97, p. 237]. ゲーデルがその証明の公表をとまどったのは,「神への信仰が彼に帰されることになるかもしれないという恐れからであり, 彼も言うように, これは形式論理学で認められた原理をもとにしてそのような証明が実行しうることを示すための, 純粋に論理学的な研究として企図されたものであった.」

このように, ゲーデルは神学の議論に決して消極的ではなかったけれども, 不完全性定理から何か神学的結論を引きだそうと試みはしなかった. しかしながら, 彼以外の一部の人たちが, 神学の論議に不完全性定理をもちこんでいる.『キリスト教と数学の書誌学 (*Bibliography of Christianity and Mathematics*)』(初版 1983 年) は, ゲーデルの定理にかかわる 13 編の神学論文を挙げている. これらの論文の要約から, いくつか引用してみよう.

> 超準モデルとゲーデルの不完全性定理は, 知識の構造と知識の対象の双方を変化させる神の自由への道を示す.

> 〔この論文では〕ゲーデルの定理を用いて, 物理学者が物質的実在の最終的理論を決して定式化できないことを示す.

> 〔この論文は〕人間の心がたんなる論理機械以上のものであるという適切な見方を発展させるうえで, ゲーデルの不完全性定理がもつ重要性に注目する.

> ……数学者も彼らのシステムで数学的真理のすべてを把握できないのだから, 神学者が, すでに明らかになった真理をうまく体系化できなくても気に病むには及ばない.

> もしも数学が人の心の気まぐれな創造であったとしても, 私たちは, ゲーデルの不完全性の結果によって, 永遠の数学的真理を堅持でき

> る．というのは，固定された規則の機械的操作ではなく，理性の使用によってのみ発見しうる真実をこの結果が保証しているからである．そして，その真実が神の存在を含意している．

> 科学の方法，技法，仮定が，完全に科学に基礎づけられるはずはないことは，ゲーデルの定理からの類推によって説明される．それらの妥当性を判定するためには，科学の外のリソースを使わなくてはならない．

これらの引用に見られるように，神学の文脈における不完全性定理の誤用は，あるときは第**6**章で考察する心の哲学におけるゲーデル流論法の応用になっており，またあるときは**4.4**節で考察した「万物理論」に関する議論と同一の考えに沿っている．けれども，この定理のもっと神学らしい使用例もある．これらはときに不可解である．

> 何千年もの間，人々は無矛盾性を決定性と同等に扱った．論理的に無矛盾な命題の列がただ1つの結論を与えることができると考えたのである．この感覚は，神がすべてを知り，すべてを支配するという考えの背後にある．クルト・ゲーデルは，ダヴィット・ヒルベルトによって提出された問題に取り組んで，無矛盾性がつねに決定性を意味するわけではないことを示した．

「論理的に無矛盾な命題の列がただ1つの結論を与える」といった考え，あるいはそれと否定完全性との関係については，どう理解したらいいか苦しむ．

これとはまた別の，ゲーデルの神学的応用は，もう少し容易に意味が理解できる．ダニエル・グレーブスによる次の考察は，ウェブサイト『進化に反する革命』のエッセイからとったものである．

ゲーデルは次のことを示した.「例えば初等算術のような大きな演繹体系においては，内部の論理的無矛盾性を確立することは不可能である——ただし，極端に複雑な推論法則を採用して，体系内部の無矛盾性が体系自体の無矛盾性と同じように疑わしくなるほど複雑な状況にしない限りは」.（ここで作者はネーゲルらの本［Nagel and Newman 59］を引用している）．要するに，私たちは，数学の最も大事な諸体系が内部矛盾をもたないことに確信をもてない.

注意！　彼は，矛盾した言明 $A = \text{not-}A$（多くの東洋宗教で起こる種類の考え）を証明したのではなかった．そうでなくて，彼は，A が真と知られているところでさえ，A と not-A の間でどちらかを決定するシステムがないことを示したのだ．完全な整数論を支えるのに十分な力をもった有限の体系は，自己完結的ではありえないのだ.

ユダヤ・キリスト教は，真理はたんなる理性で推し量れる域を越えていると長い間考えてきた．霊的な真理は，霊魂によってのみ理解される，と私たちは教えられている．それも，そうあるべくしてそのようにある．ゲーデル流の構図は，キリスト教徒が宇宙について信じていることに適っている．〔逆に〕もし自己証明が可能であることを彼が証明できていたとしたら，私たちは深い問題をかかえていることになるであろう．上述の通り，その場合宇宙は自己説明的になっただろう.

すべての論理集合が，その中の構成要素を証明したり説明したりするためにさらに高度な論理集合を必要とするのとちょうど同じように，自然界における真の無限やパラドックスは，それらを説明するためにさらに高度で，異なった種類の，一層強力な何かを現状では要している.

ゲーデルの証明からのこの教訓は，どんな有限体系も，たとえそ

> れが宇宙と同じ位に巨大なものでも，それが提起する疑問に結局自ら十分な回答を与えることができないと私が信じる理由のひとつである．

これらの所見の中心部分は，算術を含む無矛盾な体系は自らを無矛盾であると証明できず，自らの提起する問題のすべてには答えられないこと，そしてその意味で「自己完結的でない」という考察にある．与えた体系によって提起されるすべての疑問に答えることができ，そしてさらにその体系が無矛盾であることも証明できるのは，もっと広範で，もっと強い体系だけである．不完全性定理の説明として，この部分は反論できない．実際，ゲーデルが 1931 年の論文に付け加えた脚注 48a は，引用文の著者の考えに非常に適合している．

> この論文の第 2 部で示されるように，数学のすべての形式体系に不完全性が内在する真の理由は，つねにより高い型の形式化は超限回続けられる（ヒルベルト 1926，ページ 184 を見よ）のに対し，どんな形式体系でもたかだか可算回しか利用できないことである．というのは，ここで構成した決定不能命題は，適切なより高い型を加えれば（例えば，体系 P に型 ω を加える）いつでも決定可能になることが示されるからである．同様の状況は，集合論の公理体系にも当てはまる．

したがってグレーブスの意見のこの中心部分には反論できないが，他の部分については大いに疑わしい．「算術の無矛盾性が不確実である」という考えについては，第 6 章で議論しよう．この考えが神学的に意味をもつかどうかは定かではない．「どんな体系も，A か not-A かを決定できない」という説明は正しくない．どんな体系でも A か not-A かを決定できないような A は存在しないのだ．もっとも，任意に与えられた体系に対

して，その体系で A か not-A かを決定できないような，体系に依存した A はあるのだが．けれども，やはりこの引用文の主なねらいは，宇宙と神の関係のキリスト教的な理解とのアナロジーを示すために，不完全性定理を引き合いに出すことである．つまり，宇宙はその説明にもっと高度なものを必要とすると言いたいのだ．このようなアナロジーを見いだすことが，まったく間違いだというのではない．しかしもちろん，アナロジーを「事実に基づく訓話」として話すことはきわめて偏向的である．「もし自己証明が可能であることを彼が証明できていたとしたら，私たちは深い問題をかかえていることになるであろう」と作者が主張する根拠もわかりにくい．もし「自己証明」というのが，S の内部で実行される S 自身の無矛盾性証明を意味しているとすれば，もしPA内でPAの無矛盾性が証明されたとしても，そこから神学者が次のような結論を導いただろうとは信じがたい——「算術はそれを支持し説明するためにより高度なものを何も必要としないから，宇宙もそれ以上のものを必要とせず，神も必要ない．」

グレーブスは，さらに述べている．

> ゲーデルの定理の3つめの含意として，信仰が（究極的に）現実への唯一可能な応答であることが示される．マイケル・ギレンはこの意味を説明している．「数学でも何でも，証明できない真理を認める唯一可能な方法は，それを信条として受け入れることである．」言い換えれば，科学者は非科学者と同じように信仰に依存している．
> ［引用は，『無限への架け橋（*Bridges to Infinity*）』, Tarcher, Los Angeles, 1983, p. 117より．］

ここで，ゲーデルの定理への言及は無意味である．科学が信仰〔信念〕を伴うことは，神学や宗教の議論における標準的な意見であるが，ゲーデルの定理はそれとは関係がない．理論の公理を受け入れるためにどれくらいの信仰が必要かはその理論が完全であるか否かによらないし，証明なし

にいくつかの基本原理を受け入れる必要性はゲーデルの定理によって明らかにされたことではない．

ゲーデルの定理の神学的応用のもうひとつの例が，ナジャムディン・モハメッドによる次のコメントに見られる．

> あなたが世界をどのように（論理的規則で）記述しても，あなたに真か偽か判定できない「何ものか」がつねにあるであろうことが指摘されている．そして，あなたがこれらの「何ものか」に真か偽かいずれの判定をするかは，あなたの論理的な規則の妥当性に影響を与えない．奇妙だが，本当のことだ！
>
> 例えば，あなたと私がある論理的な規則の集合について合意したとしよう．そのとき私たちの論理的な規則を使って，真か偽かを決定できない何かがつねにあるから，それをAと呼ぼう．あなたはAが真であると見なし，私はAを偽であると見なすことができる．しかし，どちらの場合でも，私たちはそれぞれに新しい論理規則の集合に関して論理的に無矛盾である．
>
> いま私たちは2つの自己無矛盾な規則の集合をもっている．しかし，そこでもふたたび合意できない何かがつねに存在し，それをBと呼ぶ……などなど．これは，ゲーデルの不完全性定理の基本である．
>
> もし私たちが論理や推論だけに頼るなら，互いに矛盾しているが論理的に自己無矛盾な推論・論理システムが多数生じ，完全な混乱状態で終わることもありうる．どっちが正しいか？　すべての事柄は，何がよいか悪いかのように現在の心理的な傾向に依存するものなのか？　こういう場合には「正しさ」は意味をもたず，まさにこのことが不可知論的無神論の立場を招きうるのだ．

これらの考察と，**2.8** 節で述べた不完全性定理による「ポストモダン的

状況」の考え方には類似性がある．その理屈では，不完全性は無数のさまざまな無矛盾理論を導き，どこで真理（あるいは「真理」）が手に入るかは誰も知らない．だから，理性だけで正しい道を歩むことはできず，信仰が進むべき道となる．ふたたびこういう考えの弱点を述べれば，実際のところ数学的な思考においてさまざまな方向へのそのような枝分かれはないし，決定不能性の海の中でもがくようなこともないのである．数学的な思考における「完全な混乱状態」は，神学的幻想にすぎないのである．

不完全性定理の神学的応用に関連して，さらに検討を進めるべき思想が2つある．それらは特別神学的ではないが，しかし神学に近い見地からよく考察される．すなわち，第二不完全性定理から従うと見られる懐疑的な結論と，第一不完全性定理から従うとされる人間の心の本性について結論である．これらについては，後の章で考察する．

5. 数学に関する懐疑と信頼

5.1 第二不完全性定理の主張と注意点

定理の発見

ゲーデルは，1930年に開かれた「精密科学の認識論」会議の席で初めて彼の発見した不完全性定理を公にした．彼はそのときまだ25歳前だったが，こうした早い年齢で重要な発見をする数学者や論理学者の数は枚挙にいとまがない．列席者の中には，ゲーデルより3つ年上のハンガリー人数学者ジョン・フォン・ノイマン(63)がいた．彼は，20世紀における最も有名な数学者の一人で，そのおそろしく明敏な頭脳は数々の逸話の題材になっている．そしてその彼が，ゲーデルの証明を即座に理解した唯一の出席者であったようだ．この時点で，ゲーデルはまだ第二不完全性定理には達しておらず，第一不完全性定理の証明もPAよりいくぶん強い理論にしか適用できないものだった．しかしともあれ，彼は，そのような理論Sが無矛盾であると仮定して，Sのゲーデル文GがSで証明不可能になることの証明を得ていた．会議の後でこの結果を勘考したフォン・ノイマン

63) John von Neumann (1903–1957) はハンガリー生まれの数学者．1920年代後半には，ヒルベルト学派の急先鋒として活躍．1930年にアメリカに渡ってプリンストン高等研究所の設立にかかわり，33年から教授．電子計算機や原子爆弾の開発にも携わった．

は，「Sが無矛盾であるなら，GはSで証明可能でない」ことを導く論法が，S自身の内部で行えることを理解した．いま，「GはSで証明可能でない」とGはSにおいて同値だから，もしSの言語で「Sが無矛盾である」を表わす言明Con_SがSで証明されるならば，SはGを証明することになり，これは明らかに矛盾である．すなわち，もしSが無矛盾であるなら，Con_SはSで証明可能でない．こうして，第二不完全性定理が得られた．フォン・ノイマンはこの発見についてゲーデルに手紙を書いたが，それを受け取る前にゲーデル自身もすでに同じ発見をしており，その内容まで含めた論文（1931年公刊）が完成していて，ちょうど雑誌に受理されたばかりだった．

第二不完全性定理のこの証明において肝心な点は，普通の数学的な証明が，ある形式体系の中で**形式化できる**という発想だ．普通の証明の各ステップは，形式体系における一連の推論規則の適用に変換させることができ，それにより証明の結論は，形式言語で表現すれば，形式体系の定理になる．ゲーデルの定理が証明されたころには，すでにゴットロープ・フレーゲ，ラッセルとホワイトヘッド，ヒルベルトといった人たちの仕事を通して，このような考え方は，論理学者や数理哲学者によく知られていた．だからゲーデルは，Pに対する不完全性定理の前半——「Pが無矛盾であるなら，GはPで証明可能でない」——の証明がP自身の内部で形式化可能であることも，当然の理と見なすことができた．

実のところ，ゲーデルは彼の論文で第二不完全性定理の証明の概要を述べただけだった．一般の形式体系Sに対する第二不完全性定理を証明するためには，Sの構文論（シンタックス）を算術化し，SについてS自身で論じられるようにすることが（第一定理のときよりも）本質的に重要である．このことは，「Sが無矛盾である」ことをSの言語で表そうとするだけで必要になる．実際，ゲーデルの論文の中でもこの算術化は詳細に行われているが，いま必要なことは，「Sが無矛盾であるなら，GはSで証明可能でない」ことの証明がSで本当に形式化可能であるのを確認することだ．



しかし，ゲーデルの論文では，この形式化可能性をほとんど説明なしに妥当な主張であると結論している．つまり，第一不完全性定理の証明には，その証明を行っている体系 P で形式化できるような種類の初等算術的推論しか使っていないことを指摘しただけで，その確認を済ませているのだ．計画されていた続編で，彼は第二不完全性定理の完成した証明を与えるつもりだったが，第2部は結局実現しなかった．その理由は，ゲーデルが与えたインフォーマルな要旨だけでも読者に対し非常に説得力があった上，さらに1939年には，パウル・ベルナイスとダヴィット・ヒルベルトによる『数学基礎論』の第2巻に詳細な証明が与えられたからだ．その本が出たころには，チューリングやチャーチの仕事を通して形式体系の一般的な概念が明確になっており，今日知られている不完全性定理の一般的な表現が与えられるようになっていた．

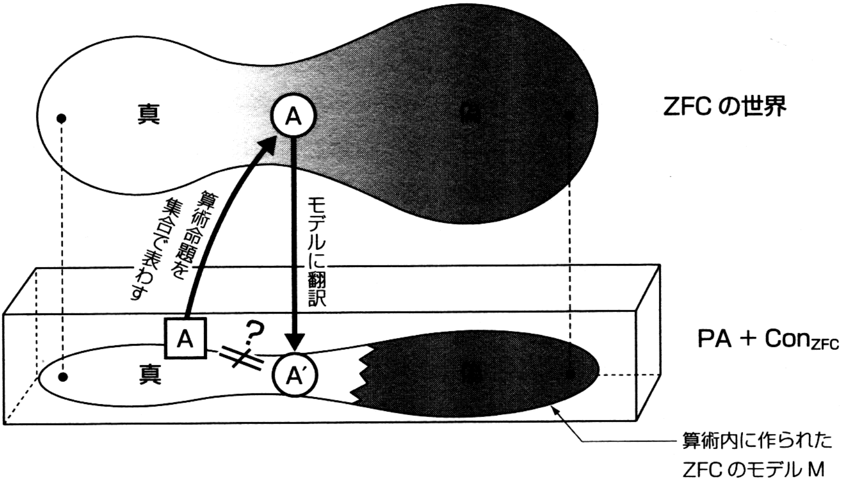
第二不完全性定理を証明するのに必要なことは，「Con_S ならば G」が S で証明可能であることを示すことだった．その逆「G ならば Con_S」が S で証明可能であることは，それよりずっと簡単にわかる．そのことを示すには，「G は“G が S で証明可能でないこと”を含意する」という議論を S で形式化すればよい．矛盾している体系であれば何でも証明可能になるから，この結論は S が無矛盾であることを含意する．こうして，G と Con_S は同値であり，その同値性は S で証明可能である．したがって，ある形式体系のゲーデル文 G が真であるとわかるのは，その体系が無矛盾であることを私たちが知っている場合で，その場合に限ることになる．

G と Con_S が S で同値であることは，2つの理由で強調に値する．第一に，ゲーデルの証明は G が真である，あるいは「何らかの意味で」真であることを示しているとよく言われるが，ゲーデルの証明は G が真であ

ることを決して示してはいない．私たちがその証明から得られる知識は，Gが真であることと，Sが無矛盾であることが同値になるということだけだ．この結論において，「ある意味で真」という言い方をする理由は何もない．Sが無矛盾であれば，Gは普通の数学の意味の「真」で，真になる．ゴールドバッハの予想が真であることが，2より大きいすべての偶数が2つの素数の和であることを意味するのと同じである．第二に，ゲーデルの証明は，真だとわかるような，ある算術的言明が，Sで証明できないことを示しているのでは決してない．当該の理論Sについて，「Con_SとGが同値である」という言明ならばS自身においても証明可能である．多くの理論Sについて，私たちはSが無矛盾であることを知っており，それ故Gが真であることも知りうる．しかし，ゲーデルの証明には，Sが無矛盾であることを示すものは何もない．

第二不完全性定理についてもうひとつ強調すべき点は，Sの無矛盾が証明できるのはSより強い体系だけであるということは，どこにも示されていないことだ．Sが無矛盾であるということは，Sの公理がすべて成り立つことではない．そして，Sが無矛盾であることの証明には，S自身の公理を使う必要はない．注目すべきは，PA が無矛盾であれば，第二不完全性定理によって，PA + not-Con_{PA} が無矛盾になることである〔not-Con_{PA} は「PA が矛盾している」を表す算術的言明〕．もしも，これよりも強い理論，つまりその算術部分で PA + not-Con_{PA} の定理をすべて証明するようなものでしか，この理論の無矛盾性を証明できないとしたら，まったく災難だろう．そうではなくて，PA が無矛盾であると証明することにより，PA + not-Con_{PA} の無矛盾性も証明されるのだ．つまり，PA + not-Con_{PA} の無矛盾性は，それとは両立しない理論 PA + Con_{PA} で証明されることになる．

ここで注意しておかないといけないのは，論理学では，PA + Con_S は「解釈可能性の意味で」Sより強いとしばしば言われることである．1階述語論理の完全性定理（第7章を見よ）は，任意の無矛盾な1階理論Sに



対して，S のすべての公理を真にする数学的構造，つまりその「モデル」が存在することを主張する．この定理を精密化すると，このようなモデルが実際 PA で定義でき，そして S の公理は，このモデルの言葉に翻訳することで $\mathrm{PA}+\mathrm{Con}_S$ で成り立つことが証明できるのだ．例えば，PA において，ある算術的関係を定義して，ZFC の文の要素記号∈をこの関係によって解釈すれば，ZFC の任意の定理 A に対して，その算術的解釈結果 A' が得られる．このとき，A' は $\mathrm{PA}+\mathrm{Con}_{\mathrm{ZFC}}$ で証明可能であると考えられる．

ただしこれは，ZFC の算術部分のすべての定理が $\mathrm{PA}+\mathrm{Con}_{\mathrm{ZFC}}$ で証明可能であることを意味するわけではない．例えば，双子素数予想の ZFC 言語における形式的表現 A（有限集合に関する言明で，それが真であることと双子素数予想が真であることとが同値であるようなもの）が ZFC で証明可能であると仮定しよう．そのとき，A を ZFC のモデルの言葉に翻訳した A' は，$\mathrm{PA}+\mathrm{Con}_{\mathrm{ZFC}}$ で証明可能である．しかしながら，A' が双子素数予想そのものと PA において同値になる保証はない．翻訳 A' は A の算術的意味を保存しない．実際，ZFC の算術部分には，A が真で，A' が偽になるような言明 A が存在する．このような A は ZFC で決定不能なものである．ただ

し，もし A が ZFC の算術部分において成り立っているゴールドバッハ類の言明であれば，A' だけではなく，A によってその意味が捉えられているどんな算術的言明も $\mathrm{PA} + \mathrm{Con}_{\mathrm{ZFC}}$ で証明可能である．

ヒルベルト＝ベルナイスの本『数学基礎論』における第二不完全性定理の証明は，この定理をできる限り一般的に定式化して証明するにはどうすればいいかという問いには答えていない．その後，ソロモン・フェファーマンが（彼の論文「一般的な設定でのメタ数学の算術化」で）不確かさの残っていた領域を片付けたのはようやく 1960 年のことだ．もっとも，PA や ZFC のように，実際に論理学や数学で用いられ，よく研究されている理論に関しては，どのように第二不完全性定理を定式化して証明するかは 1930 年代から明らかだった．

ゲーデルの第二不完全性定理のオリジナルな証明は，それが定理そのものに与える深い意味合いやその応用の幅を鑑みれば，いまでも最も重要な証明である．しかし，ここでもまた PA や ZFC のような特定の理論に対しては，この定理の別証明が論理学の研究論文にいくつも見いだせる．もっとも，これらの別証明は高度に技術的である．

いくつかの結論

どんな理論 T の無矛盾性ももちろん別の理論をとってくれば証明できる．つまり，「T が無矛盾である」という言明は（それが真であろうとなかろうと）別の理論では定理のひとつになりうる．例えば，Con_T を PA の公理に加えれば，T の無矛盾性が証明可能になる理論ができる．繰り返すと，もし T が無矛盾であるなら，$\mathrm{PA} + \mathrm{Con}_T$ は T で証明可能でないひとつの算術的定理を証明するという点で T より強いが，しかし反対に T はその算術部分だけでも PA で証明可能でない無数の（非ゴールドバッハ類の）定理をもつかもしれないのだ．

しかし，T の無矛盾性が $\mathrm{PA} + \mathrm{Con}_T$ で証明可能であるという考察は，

定理の重要な特徴を際立たせるのに役立つから，一見して思うほど無意味ではない．第二不完全性定理は，（つねにある特定の形式体系に関係づけられた）形式的証明可能性についての定理であり，（問題となる T について）Con_T が T 自身において証明可能でないことを示すものである．あくまでも理論 T において，Con_T の形式的証明がないことを示すもので，いかなる反論の余地もない論法によってとか，あるいは数学者たちに受け入れられる論法によって真であることが示せるというような絶対的な意味で，「T が無矛盾である」ことが証明できるかどうかを述べたものではない．PA $+ \mathrm{Con}_T$ における Con_T の証明可能性も T 自身における Con_T の証明不可能性も，Con_T が真であることを数学的に満足のいくように実証できるかどうかについて，何も直接的な結果をもたらしはしない．

この特徴は，別の面からも論じるに値する．T の無矛盾性を形式的に証明する理論はとても簡単に発見できるので，T 自身で Con_T が形式的に証明できないと言うことは，じつは想像以上に強い主張になる．それは，T が自らを分析したり，正当化したりする手段を欠いているという問題だけではなく，自らの無矛盾性を無矛盾に主張する能力を欠いているということでもある．**2.7** 節で記述されたゲーデルの不動点構成を使うことで，私たちは，「この文は PA の公理と矛盾しない」を形式化する算術的言明 C を作りだすことができる．このとき，理論 PA $+ C$ は（どんな分析も正当化も試みることなしに）自らの無矛盾性を主張する．そうすると，第二不完全性定理によって，PA $+ C$ は実際には矛盾していることになる．だから，無矛盾の証明不可能性は，無矛盾の主張不可能性と呼んでもいいかもしれない．T の無矛盾性は別の無矛盾な理論においては主張できるけれども，無矛盾である理論 T ではそれ自身の無矛盾性を主張できない．（読者のための演習問題：互いに相手の無矛盾性を主張するような，一対の無矛盾な理論 S と T は存在しうるか？　答えがノーであることは上述のことからわかる．〔訳者による略解を p. 157 の脚注 65 に示す．〕）

第二不完全性定理を応用し，ある理論が矛盾することを，その理論がそ

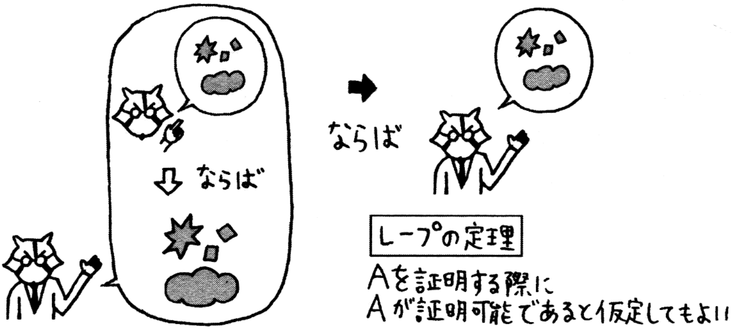
れ自身の無矛盾性を証明することによって示すことも論理学においては稀ではないが，通常無矛盾性証明の興味はその議論の肯定的な結論にある．その実例は，**レーブの定理**である．まず，（ゲーデルの証明において）“PA の定理ではない”という性質の代わりに，“PA の定理である”という性質に対して証明可能な不動点を構成してみよう．つまり，「この言明は PA で証明可能である」を定式化した算術的言明 H（最初にこの問題を提起したレオン・ヘンキンに敬意を表してそう記す）を作る．すると，H は PA で証明可能になるか，どうか？　H の意味だけを考えれば，H が真であるのは，それが PA で証明可能であることと同値であり，これ以上議論が先に進まない．だから，この奇妙な自己言及文が PA で証明可能であるかどうかは到底判定できそうには思えない．

レーブは，もっと一般的な次の事実が成り立つことを示して，H の証明可能性の問題を解決した．

> **もし PA が「PA が A を証明すれば，A である」ことを証明するなら，PA は A を証明する．**

そうすると，とくにヘンキン文 H は仮定を満たし，PA で証明可能になる．レーブの定理を示すためには，PA + not-A という理論を考えることになる．まず，「PA が A を証明すれば，A である」ことが PA で証明されると仮定する．それは「not-A ならば，PA が A を証明しない」ことを意味するから，「not-A ならば，PA + not-A が無矛盾である」ことが PA で証明されることになる．すなわち PA + not-A が PA + not-A の無矛盾性を証明することになり，したがって第二不完全性定理より PA + not-A は矛盾していることになるので，PA が A を証明することが導かれる．この議論は，第二不完全性定理が適用できるどんな理論 T にも当てはまる．

第二不完全性定理はレーブの定理の特殊ケースとも考えられる．それを見るには，レーブの定理における A を論理的矛盾「B かつ not-B」とおけ



ばよい．実際，このような A に対して，「PA が A を証明する」は「PA は矛盾している」と同じである．またこのような A に対しては，どんな仮説的言明「C ならば A」も not-C と論理的に同値である．そうすると，レープの定理により，もし PA が「PA が無矛盾である」を証明するなら，PA が矛盾していること，つまり，もし PA が無矛盾であるなら，PA は「PA が無矛盾である」ことを証明しないことがわかる．

レープの定理は，自然数についての定理を証明する原理としては，かなり奇妙なものだ．A を証明するために，その前提として A が PA で証明可能であると仮定することを，（それが PA で形式化されうる議論である限り）許容するのである．というのは，PA に「PA に A の証明があれば，A である」の証明があるなら，PA には A そのものの証明があるからだ．同じ原理は，例えば ZFC についても成り立つ．この原理の応用事例は，伝統的な数学の興味対象である素数などに関する普通の数学的定理を証明する領域では知られていないが，論理学では活用されている．

レープの原理は，ただ奇妙というよりも，むしろ不可解に思われるかもしれない．A を証明する際に，A が PA で証明可能であると仮定することが，どうして許容されうるのか？　そもそも PA で証明可能なものは真であるから，面倒なことはせずに A が真であると結論してはいけないのか，つまり〔そのような仮定が許容されうるなら〕まったく推論をしないで A を証

明することはできないのか？　ここで肝心な点は，A を証明するときに，A が PA で証明可能であると仮定することが許容されるというのは，A が PA で証明可能であるという仮定から A を導く推論が PA の中において実行しうるときに限るということだ．PA 自身の中では，PA で証明可能なものはすべて真であると確証しえないことは，第二不完全性定理によって示される．例えば，（0 と 1 は異なるとして）$0=1$ が PA で証明可能ならば真であるという言明は，$0=1$ が PA で証明可能でないこと，つまり PA が無矛盾であるということと同じである．

自らの無矛盾性をほぼ証明する理論

PA は無矛盾であるから，自らの無矛盾性を証明しない．けれども，PA の公理から任意に有限個を選出したとき，その有限個の公理集合の無矛盾性は PA で証明可能である．同じことは ZFC についても言える．ZFC の公理の有限集合を任意にとるとき，その無矛盾性は ZFC で証明される．

もしもある理論が矛盾していたなら，その理論の公理から導ける論理的矛盾の証明がある．PA や ZFC のような理論は実際に数学で行われている証明を形式化するもので，そこでのどの証明も有限列であり，その理論の有限個の公理だけを使ってできている．それで，もしその理論の公理からなるどんな有限集合も無矛盾であるなら，理論全体もそうであることになる．この簡単な議論は PA の中で行える．したがって，もし PA の公理からなるすべての有限集合が無矛盾であるなら，PA も無矛盾であることは PA で証明可能である．しかるに，PA の公理のすべての有限集合が無矛盾であることが PA で証明されているのなら，なぜそれから PA は自らが無矛盾であることを証明することにならないのか？

その答えは，「PA はその公理からなるすべての有限集合が無矛盾であることを証明する」という形式化の曖昧さにある．正しくは，「PA の公理の任意の有限集合 M に対して，PA は“公理の有限集合 M からなる理

論は無矛盾である”ことを証明する」となる．これとは異なり，「PA は“PA の公理の任意の有限集合 M に対して，M の公理からなる理論は無矛盾である”という言明を証明する」というのは正しくない．この相違は，証明や無矛盾性についての日常のインフォーマルな話にはまったく対応するものがないが，ゲーデルの定理に関しては〔これが示唆するような〕とても繊細な議論が必要になりうることは記憶に留めたい——その微妙な部分が，この定理にかかわる多数の哲学的あるいは非形式的な考えに関係するにしろしないにしろ．私たちは **6.4** 節「自分の心を理解すること」で，この論点に戻ることになる．

5.2 懐疑主義

不完全性定理は，数学に関するある種の懐疑主義の根拠になっているとよく思われている．数学においては，厳密に言えば何も証明できないか，あるいは PA や ZF のような理論の無矛盾性さえ疑わしいことがこの定理によって示されるなどと言われることがある．

多くの場合，この懐疑的な結論がどうやって導かれるかについては，何も説明されない．例えば，ブリタニカ百科事典には，ゲーデルの証明について，次のような奇妙なことが書かれている．

> いかに厳密に論理的な数学体系でも，その体系内の公理に基づいては証明も反証もできないような命題（あるいは問題）があることを〔それは〕言明している．したがって，算術の基本公理が矛盾を起こさないかどうかは確かではない．

この説明には他にも奇妙な面があるが（じつはカール・ボイヤーとウタ・メルツバッハの『数学の歴史』からの借用），それはさておき，不完全性から

矛盾の可能性を唐突に結論づけることは，何ら明確な合理的根拠をもたないし，上の解説にはその根拠について何の示唆もない．また，次のようなコメントも見かける．

> ゲーデルの定理によって，どんな体系も不完全であるか矛盾している．したがって，論理的に言って，私たちはどんな命題も完全に「証明する」ことは不可能である．

こうした文章に「論理的に言って」のようなフレーズが含まれていることは，不完全性定理に触発された頓珍漢な推論の多くがもっている注目すべき特徴である．

ゲーデルの仕事に基づいて行われる懐疑的な推断が理解可能な説明を伴う場合，それは通常とくに第二不完全性定理をもちだす．例えば，ネーゲルら［Nagel and Newman 59，p. 6］は，次のように述べている．

> 〔ゲーデルが証明したことは〕例えば初等算術のような，非常に大きな演繹体系に対して，内部の論理的無矛盾性を確立することは，とても複雑な推論原理をもちださないと不可能だということである，しかし，その原理に対する内部無矛盾性は，もとの体系の無矛盾性と同程度の疑念を残している．

さらにモーリス・クラインは『不確実性の数学』で，「無矛盾性に関するゲーデルの結果は，どんな数学的方法も安全な論理的原理を使って無矛盾性を証明することはできないということだ」と述べた．

このような考察には，2つのポイントがある．私たちが数学で使っているかなりの形式体系について無矛盾性が疑わしいという見解と，そしてこれらの体系の無矛盾性はふつうの数学的な言明を証明するのと同じ感覚では証明できないという見解だ．これらの見解に対して正しい視点を得るた

めに，無矛盾性への疑念の問題から検討していこう．

ゲーデルの定理は疑念と無関係

ゲーデルの定理のどこを見ても，“数学で使われているどんな形式体系も，その無矛盾性にはまったく疑いがない”という立場と矛盾してはいない．実際，これらの体系の公理が真であり，そして無矛盾であるという絶対確実な知識をもっていると主張しても，ゲーデルの定理のどこにも相反しないのである．

この点をきちんと考えるには，次の2つを区別する必要がある．数学の公理や推論方法に関してどの程度の懐疑や信頼が正当あるいは合理的かということと，ゲーデルの定理がこの問題に対してどんな関係をもっているかということである．もしかしたら私たちは，例えばZFCのすべての公理が真であることを，絶対的確信をもって知っているという主張に対しては，懐疑的な見方をするかもしれない．では，この主張を批判するためにどのようにゲーデルの定理を使うことができるだろうか？　この主張に対して，“ZFCの公理が真であることを確信をもって知っているなら，ZFCの無矛盾性がZFCで証明可能でなければならない”と批判するのは順当だろうか？　いや，これはまったく理にかなっていない．ZFCの公理がすべて真であること（だから無矛盾であること）を確信をもって知っているからといって，それだけでZFCの無矛盾性に対する証明がZFCの中にあるとどうして言えるか？　明らかに，私たちは数学のすべてを証明できるわけではなく，ときには証明なしでいくつかの基本原理を採用しなければならない．それをいうためだけなら，ゲーデルの定理は必要ない．ZFCの公理がこれほど驚異的な説得力をもち，これほど明らかに〔標準的な〕集合の世界観で真であるとすれば，これらの公理を私たちの出発点として採用するのは最善の方法だ．そして，それらの公理がすべて真であるから，公理全体も無矛盾である．

もう一度，問題点をおさらいすると，ZFC の公理に対するこういう見方が正当化されるか否かではなく，その批判として不完全性定理をもちだすことが妥当であるかどうかである．もし ZFC の公理がすべて明白に真であるなら，たとえ ZFC においてその無矛盾性が証明されることは期待しえないとしても，それは明らかに無矛盾である．

ZFC の無矛盾性に対し懐疑的な立場をとってみても，そのことと第二不完全性定理がどこで関連していると見ているのかは，よく考えてみるとはっきりしない．ZFC の無矛盾性証明を ZFC で行う興味は何だろうか？ ZFC の無矛盾性こそがまさに問題なのだから，ZFC の中での証明がとくに重要性をもっていると考える根拠はない．

つまり，もし私たちが ZFC の無矛盾性について疑いをもっていないとすれば，第二不完全性定理にはそのような疑いを喚起するようなものは何もない．そして，もし私たちが ZFC の無矛盾性について疑いをもっているなら，ZFC で形式化可能な ZFC の無矛盾性証明があったとしても，それが疑いを取り除くために何か役に立つと信じる根拠もまったくない．

「有限の立場」の伝統

ヒルベルトは，非常に弱い数学的な仮定と有限の立場の推論を基にして，つまり無限集合の存在を仮定せずに，限定された論理的原理のみ使用して，ZFC のような強い理論に対する無矛盾性の証明を，実現するアイデアをもっていた．第二不完全性定理は，ヒルベルトが思い描いた種類の推論だけを使うのでは，実のところ PA の無矛盾性さえ証明できないことを立証した．だから，ヒルベルトの意味での有限的推論だけが「安全な論理的原理」で，無矛盾性に関して疑う余地がないものだとすれば，つまり有限の立場の証明だけが本当の証明であるという見方をするならば，初等算術の無矛盾性さえ安全な論理的原理によっては証明できない，ましてや……といったことが実際に結論されるだろう．けれども，このような見方はゲー

デルの定理からの結論では決してない．それは，ゲーデルの定理に依拠する数理哲学のひとつの学説である．有限の立場の推論だけが確実に正しく意味のあるものだと信じるのでなければ，有限の立場においてPAの無矛盾性証明がないことは冷静に受け止められるし，そしてPAの無矛盾性が他の手段で簡単に証明可能であることも認められる．

有限の立場より少しゆるい観点から見ると，無矛盾性は弱い健全性条件のひとつにすぎないことも注目されるべきである．Sが無矛盾であることは，第二不完全性定理自身からわかるように，かならずしもSが偽の定理を証明する可能性を排除しない．例えば，PA + not-$\mathrm{Con}_{\mathrm{PA}}$は無矛盾だが，PAの矛盾性を（したがってそれ自身の矛盾性も）偽って証明する．もし私たちが私たちの理論を正当化したいなら，たんなる無矛盾性証明はたいして役に立たない．

哲学者ばかりでなく，数学者もまた，ヒルベルトの哲学的遺産やその後何十年も不完全性定理を取り巻いているレトリックに気をうばわれてしまうことは珍しくないようだ．そういう人たちは有限の立場をとるべきとする学説をはっきり支持することなく，PAの無矛盾性証明が有限の立場で与えられないことが甚大な重要性をもつかのように言う．そして，無矛盾性証明については，例えばZFCが無矛盾であるならPAも無矛盾であるというような相対的無矛盾性証明だけが可能であると言う．そこで私たちが次に検討すべきは，無矛盾性証明が普通の数学の証明とはどこか違っているという見解，つまり普通の数学的な言明が証明される意味では，無矛盾性の言明は証明されないという考え方についてである．

5.3 無矛盾性証明

論理学の論文には，無矛盾性証明に関するものが多数ある．ゲオルク・クライゼルは，これらの証明がしばしば単なる無矛盾性よりもっとずっと

深いことを証明していると主張している．しかし，それがどんなものかを指し示すのは難しいことかもしれない．その一例は，1935年にゲアハルト・ゲンツェンが与えたPAの無矛盾性証明だ．彼の証明は，（通常の数学的帰納法ではなく）自然数の順序よりずっと長い順序関係に対する帰納法原理を使うものだが，その帰納法原理を，限定された性質だけに適用している．だから，それは一方ではPAを拡張したものだが，他方ではそれを制限したものでもある．ゲンツェンの証明は，それから生じた「順序数解析」という研究テーマ全般も含め，非常に専門的なものであり，人々がPAの無矛盾性についてもちうる懐疑と単純に結びつくようなものではない．

もうひとつの有名な例は，集合論における選択公理の「相対的無矛盾性」に対するゲーデルの証明である．これは無矛盾性証明ではなく，通常「ZFが無矛盾ならば，ZFCも無矛盾である」という相対関係に対する証明であると理解されている．このような相対関係についての結果は，もともとZFCを明らかに無矛盾であると見なす人には何ら興味ある情報を与えない．ところが，その証明法はこれよりはるかに多くのことを確立していて，例えば，選択公理を使って証明されうるすべての算術的な定理は，選択公理を使わないでも証明できることを示している．これは，ZFCの無矛盾性を仮定してさえ，決して自明でない事実である．

論理学におけるこれら2つの有名な結果をここに挙げた主な理由は，「無矛盾性証明」あるいは数理論理学での「相対的無矛盾性証明」の内容や意味合いがしばしば技術的で難解であることを強調するためだ．以下の議論ではもっぱら，上述のものとは別種の無矛盾性証明を取り上げる．これらの証明は数学的にはほぼ明らかなものだが，それからは理論の無矛盾性よりはるかに多くのことが得られる．つまり，理論のすべての定理が真となることが証明される．

ZFC の無矛盾性の証明

ZFC に関しては，ゲンツェンによる PA の無矛盾性証明に対応するような，論理学上の技術的な無矛盾性証明がない．しかし，ZFC の無矛盾性は，「ZFC が無矛盾である」よりずっと強いさまざまな言明の直接的帰結であって，とくに「無限大の諸公理」として知られる種類の集合論的原理から導かれる（8.3 節を参照）．このような公理は（ZFC の一部である無限大の基本公理を例外として）通常の数学で何か定理を証明するために用いられることはないから，ZFC に対するこれらの無矛盾性証明が普通の数学的証明ではないと考えるのは当然だし，また“そのような証明は，フェルマの最終定理が証明されたのと同じ意味合いで ZFC の無矛盾性が証明されうることを示しているのではない”と考えるのも，まったく道理である．このことは，私たちが無限大の諸公理を数学的に妥当であると見なすか否かにかかわらず言えることである．数学者が，非常に少数の例外を除いて，無限大の諸公理を定理の証明に利用していないことを鑑みれば，ZFC の無矛盾性に対する「普通の数学的証明」が見つからないこともうなずける．

ふつうの数学的証明ではないという意見は，ZFC の無矛盾性に対する「反映による証明」として知られているものにも当てはまる．以前述べたように，ZFC の公理のどんな有限集合 M に対しても，M が無矛盾であることは ZFC で証明可能である．だから，私たちが ZFC の定理であるとわかった言明をすべて数学上証明されたものとして受け入れるつもりなら，ZFC の公理のすべての有限集合が無矛盾であることも証明されたものとして受け入れるべきであり，したがって ZFC が無矛盾であることも受け入れるべきであると，そうなるように思われる．この議論の筋道を調べることは，「哲学の虫缶」を開けてやっかいな問題を解き放つことになるので，ここでは脇に置いておく方が賢明だろう．つまり，このような反映による無矛盾性証明は，それがどんな長所をもっていようと，あまり普通の数学の証明らしくないことだけはふたたび注意しておこう．

他方，普通の数学だけを使ってPAが無矛盾であることを証明するのは単純な課題である．いま，無矛盾性証明のようなものは，他の数学の証明に比べると必然的に問題含みであるとか，疑わしいとか，あるいは軟弱であるというような見解を詳しく調べるために，算術の事例に戻ろう．

PAの健全性を証明する

普通の数学の中に入る自明な無矛盾性証明の一例として，以下のように列になった理論の無矛盾性をいかに証明するかを考えてみよう．

$$\mathrm{PA}, \mathrm{PA}_1, \mathrm{PA}_2, \ldots$$

ここで，PA_1はPAに「PAは無矛盾である」という公理を加えたもの，PA_2はPA_1に「PA_1は無矛盾である」という公理を加えたもの，以下同様に定義する．

もし理論Tのすべての算術的定理が真であるなら，Tは**算術的に健全**であるという．矛盾している理論は偽の算術的言明$0=1$を証明するから，算術的に健全な理論は無矛盾である．さらに，もしTが算術的に健全であるなら，理論$T+$「Tは無矛盾である」も算術的に健全である．ここで，もしPAが算術的に健全であるとすれば，上記の列のすべての理論は健全であって，それゆえ無矛盾であることがわかる．実際，もっとずっと長い列の理論が，同じ理由によって無矛盾であると示される．(ここで「もっと長い列」によって意味されるものが何かについてのヒントは，**5.4**節を見よ．)

PAが無矛盾であるという知識だけでは，列になった理論が最初のもの以降も無矛盾であることを正当化するのに十分でないことに注意しよう．不完全性定理から，自らの矛盾性を証明する無矛盾な理論があることがわかっているからだ．それで，例えば，PAに「PAは矛盾している」という公理を付け加えて得られる理論Tは無矛盾であるが，もしそのTに「Tは無矛盾である」という公理を加えたら，矛盾した理論になる．

さて，列になった理論全体が無矛盾であることを証明するためには，PA が算術的に健全であることを証明すれば十分である．これには何が必要か？　まず「真なる算術文」を定義する必要がある．それから，PA の公理がすべて真なる算術文であることを示す必要があり，そして PA の推論規則が真なる前提から真なる結論を導くことを示す必要がある．すると必然的に，論理学と数学の形式的手続きがそこに含まれ，そうなるとこの本で扱える範囲を越えてしまう．ここでは，その証明の二，三の側面だけに触れておこう．

第一に，「真なる算術文」の概念は，形式体系とは無関係に定義されることを思いだそう．実際，**2.4** 節でも説明したように，算術文に対する「真」の概念の数学的定義から得られるものは，単に“ゴールドバッハの予想が真であるのは，2 より大きいすべての偶数が 2 つの素数の和であるときで，そのときに限る”といった言明だけで，他の算術文についてもまた同様である．

第二に，PA の公理が真であることと，PA の推論規則が真なる前提から真なる結論を導くことを証明するには，PA に入っているものと同じ公理と推論規則に加えて，若干の集合論あるいは同程度の抽象度の数学を使用するだけだ．その証明は ZFC で行われるとよく言われるが，論理学的に言ってこれは大仕掛けすぎる．その証明を行うのに必要なのは，もっとずっと弱い集合論，とくに ACA[64] として知られている ZFC の断片でいい．一般の数学者が ACA の定式化自体に精通していることはまずないけれど，ACA で定式化される推論の方法は数学で一般的に使われているものである．

このような議論によって，列になった理論 PA, PA_1, PA_2, …… のすべてが無矛盾であることの数学的証明が存在することが言えて，そしてそれ

64) ACA は，自然数の集合だけを扱う弱い集合論（2 階算術）の代表的公理系のひとつ．中核となる算術的内包公理（Arithmetical Comprehension Axiom）は，算術的に定義可能な集合の存在を保証するもの．なお，帰納法を算術式に制限した体系 ACA_0 は，PA の無矛盾を証明しない．

は弱い集合論 ACA で形式化可能である．とりわけ，PA が無矛盾であることの，普通の数学的な原理を用いた数学的証明があるのだ．

こうして証明が達成されたと述べたときによくある反論は，その証明が本当の無矛盾性証明ではないというものだ．というのは，ACA は列中の理論のどれよりも論理的に強いからである．そして，もし私たちが PA や列中のどれかの理論の無矛盾性について疑念をもつなら，その疑念は ACA の無矛盾性に及ぶであろう．だから，その証明が示しているのは，ACA の無矛盾性を仮定したうえでの理論列の無矛盾性である，つまり，もし ACA が無矛盾であるならば，PA と列中の他の理論が無矛盾であることである．

こうした考え方は，私たちが PA の無矛盾性に対して疑念をもち，無矛盾性証明を使ってその疑念を減じようとしているという前提に基づいている．しかし PA や ACA で形式化される公理や原理をそのまま私たちの数学的な知識の一部と見なすときには，PA（そして列中の他の理論）に対する健全性証明はまったく疑念を減じることを目的としていない．それはただ単に論理学の基本的な結果に対するほとんど明らかな証明のひとつである．

したがって，健全性証明（ここでは，PA と列中の理論全体に対するもの）が，他の数学的証明とまったく同じ感覚では証明になっていないという意見に対し，ゲーデルの定理は何も根拠を与えていない．すべての数学的証明は，特定の基本的な公理と推論規則に基づいている．上の例のような無矛盾性証明はいかなる意味でも，PA で定式化される公理と推論規則を正当化したりはしないが，それは，まさに算術的言明の証明，すなわち算術的言明に対する他の証明が同じ公理と推論規則を用いてするのと同じ方法かつ同じ「立証」の感覚で，言明が真であることを立証するような証明である．その証明を PA の無矛盾性を立証するものと見なせるのは，もちろん私たちが ACA で定式化される数学的な公理と推論規則を信頼しているからである．それらの無矛盾性だけでなく，数学的妥当性（この文脈では，算術的

健全性を意味するだろう）に対する信頼が拠り所になっているのだ．

PA と ACA を私たちの数学的知識の一部を直接形式化するものと見なさない人たちは，PA の無矛盾性証明をはじめ，ACA で証明されるありとあらゆる結果に疑念をもつような理由をきっと何かもっているだろう．次は，この懐疑的視点についてもう少し詳しく検討していこう．

懐疑論の視点

もし私たちが理論 T の無矛盾性について疑念をもっていて，そして理論 S における T の無矛盾性証明によってその疑念を減じようとしているなら，確かに私たちは S におけるそうした証明で使われている推論に信頼を置く必要がある．そして，もし私たちが T の無矛盾性証明が S にあることだけしか知らなかったら，T が無矛盾であると帰結するためには S の無矛盾性を信頼しなければならない．

このような懐疑的な状況は，ACA あるいは PA の無矛盾性について疑念をもっている，あるいはもつべきと主張する人たちに特有のものではない．PA，ACA，ZFC などの理論に対する私たちの見方がどうあれ，ある理論 T で定式化された数学的原理が決して明白であるとも容認できるとも思えず，T の無矛盾性についてさえ疑念をもつ場合があるだろう．例えば，PA に「PA は矛盾する」という公理を加えて得られる理論は，偽の公理をもっており，ゲーデルの定理の知識がなければ，その無矛盾性について疑いをもつほうが自然である．けれども，知ってのように，この理論の無矛盾性は，PA の無矛盾性からの帰結として証明できるのだ．

PA や ACA のような理論に関する懐疑について特筆すべきことは，普通の数学のどんな文脈にもそのような懐疑はめったに示されないことである．とくに，（上記の“無矛盾性証明は「ACA が無矛盾ならば，PA が無矛盾である」ことを示すだけだ”というような）算術的定理の仮説的解釈は，数学者もその他の人々も，普通の算術的言明の証明に対してはまったく口にださ

ない．例えば，「アンドリュー・ワイルズがフェルマの最終定理を証明した」という主張への応答として，「いえ，いえ，そんなことはありえない．彼が証明したのは，単に“もし ZFC が無矛盾であるなら，$n>2$ について，$x^n+y^n=z^n$ には正の整数解がない”ことだけだ」といった反論には決して遭遇しない．この違いの原因は，ワイルズの証明がきわめて初等的で，PA の無矛盾性証明に影響を与えるような疑念をもちえないということではない．それどころか，ワイルズの証明は巨大な数学的道具立てを含んでおり，この定理を証明するのに最低限どんな原理が必要かという問題は未解決なのである．けれども，もし ZFC の無矛盾性（証明の設定で仮定されるとして）について疑念をもっているなら，ここでスケッチした無矛盾性証明の場合とまったく同じようにフェルマの最終定理の証明に対しても，“ZFC での証明がその定理が真であることを示しているとみなせる明白な根拠はない”というのが本当であろう．

ZFC で証明される算術の定理に対しては，つねに「もし ZFC が無矛盾であるなら」という暗黙の付帯条件があると言えるだろう．他の理論についても同様だ．無矛盾性定理に関しては，例えば“PA の無矛盾性についてあらゆる疑念を晴らすような絶対的無矛盾性証明が得られた”というような誤解を生む印象を与えないように，私たちはこの条件を明示しておく必要があると言えるかもしれない．

それならば，フェルマの最終定理が何か絶対的な意味で証明されたという誤解を生む印象を避けることが，なぜそれと同程度に重要でないのかと不思議に思うかもしれない．けれども，このような仮説的な見方でどうやって数学一般の意味を理解するのかという，いっそう本質的な問題がある．

ディリクレによって 1837 年に証明された古典的結果について考えてみよう．それは，正の整数 n と k が 1 より大きな公約数をもっていないときはいつでも，数列 $n, n+k, n+2k, n+3k, \cdots\cdots$ に無限に多くの素数が含まれるというものである．もし私たちが ACA で定式化された数学的原理を妥当なものと認めないと仮定したら，ディリクレの定理の ACA での

証明から何を結論することができるのか？ この場合，ディリクレの定理はゴールドバッハ類の言明ではないから，「もしACAが無矛盾ならば，“正の整数 n と k が 1 より大きな公約数をもっていないときはいつでも，数列 n, $n+k$, $n+2k$, $n+3k$, ……に無限に多くの素数が含まれる”」と結論するための根拠はない．それでは，ディリクレの定理の証明はいったい何を証明しているのか？

この問題についてこれ以上考察するのは，数学の哲学の中にあまりにも深入りしすぎるだろう．上の議論の基本点は，次のように要約できる．実際ある理論 T の無矛盾性について疑念をもち，そして無矛盾性証明を通してそれらの疑いを排除しようとすることは完璧に可能である．そのような場合，無矛盾への疑念が同程度に生じることのない理論において，証明を実行する必要がある．しかしながら，無矛盾性証明は，形式体系について（あるいは，算術化すれば自然数について）のある事実に対するまったく普通の数学的証明であり，一般の算術的定理の証明が数学の無矛盾性についての疑念を減じることを目的としないのと同じように，そうした疑念を減じることを目的としてはいないと言ってもよい．数学において何が疑わしいか，そうでないかについて，ゲーデルの定理は何も述べていない．算術の無矛盾性を証明できないもののように語ることは，普通の数学全般に対して一貫して懐疑的な態度をとるのでなければ意味をなさない．

5.4 無尽蔵

懐疑主義から離れて，不完全性定理が適用されるような形式体系，例えばPAやZFCは，私たちの数学的知識のなかでも問題なく形式化された部分であると認めておこう．そのとき，第二不完全性定理から何が結論されるか？ これに関して，ゲーデルは次のように述べている．（全集第 3 巻，p. 309，太字による強調は原文に従う．）

> 数学の完全化不可能性をとりわけ明らかにするのが，**この定理**［第二不完全性定理］である．なぜなら，**ある人が公理と規則から成る整合的に定義される体系を作って，その体系について次のような主張を整合的に行うことを，それは不可能にしているからである．すなわち，「これらの公理と規則のすべてが，（数学的な確信をもって）正しいと私は認識しており，そしてさらに私はこれらが数学のすべてを含んでいると信じている」**．もし誰かがこのようなことを言明するなら，彼は自己矛盾に陥る．なぜなら，もし彼が考慮中の公理を正しいと認識しているなら，彼は（同じ確かさで）それらが無矛盾であることも認識する．それゆえ，彼はその公理から導出されない数学的洞察をもっていることになる．

したがってこの場合に，第二不完全性定理は次のような肯定的結論をもっている．私たちが（その公理がすべて真なる言明であるという意味で）健全であると認識するどんな形式体系も，その体系が無矛盾であるという言明を新しい公理として加えることで，より強いが，同じく健全であると認識できる体系につねに拡張できる．

これは，スタートの理論 T の拡張が直ちに無限回行えるようになることを意味する．$T=$ PA の場合は，前に説明した通りである．列 PA, PA_1, PA_2, ……の各理論 PA_i は，前の理論が無矛盾であることを新しい公理として付け加えることによって得られる．PA が健全であれば，この列中のすべての理論も健全である．私たちはさらにこう言うことができる．理論 PA_ω を PA の公理とこうして得られる無矛盾性の言明全部をあわせて公理にもつものとして形成すれば，PA_ω も同じく健全である．そして，この手続きはまだ続くのだ．理論 PA_ω はなお不完全性定理の適用を受ける体系で，「PA_ω は無矛盾である」を新しい公理として付け加えることによって，さらに強い理論 $\mathrm{PA}_{\omega+1}$ に拡張することができる．

この手続きを続けるとき，何が起きるか？　PA が健全であるときにそ

れも健全であることが立証できるPA_ωのような理論は，そのような理論がうまく定義できるときはいつでも，それをさらにもっと強い理論でなおも健全であるようなものに拡張することが可能だ．しかし，こうにして得られた特定の理論が実際に健全であると証明できるなら，まさにそのときに疑問が生ずる．話は急に専門的になる．

上述の理論の列において，それぞれの理論は，前の理論が無矛盾であるという公理を前の理論に付け加えることで得られた．ゲーデルの注意は，理論Tに「Tが無矛盾である」よりも強い言明で，なおかつTの算術的健全性から導かれるようなものを新しい公理として加えて得られる諸理論にも，同じように当てはまる．例えば，もしTのすべての算術的定理が真であれば，Tに公理として「TがΣ健全である」を加えてできる理論，あるいは，Tに「Tで証明不可能なすべてのゴールドバッハ類の言明は偽である」を加えてできる理論についても，同じことが言える．無矛盾性言明による拡張列と同じように，この方法による理論の拡張を次々用いてPAの健全拡張の列を得る．この列の理論は，無矛盾性言明を加えて得られた列における対応する理論より論理的にずっと強いであろう．これと似ているがさらに強い拡張原理で，**反映原理**として知られているものも定式化できる．

本書では**6.3**節で，心の哲学におけるゲーデル流の議論に関連して，無尽蔵の問題に戻る．無矛盾性言明を繰り返して加える数学はそこでは話題にならないが，代わって，私たちの数学的知識のすべてを包含するような形式体系を明示できないということから，私たちの数学的思考には本質的に機械的でない何かが存在していることが示せるのではないかという議論が俎上にのる．

---

65) **p. 139 の演習問題への略解** 「TがAを証明する」を$T \vdash A$と書く．$T \vdash \mathrm{Con}_S$より$S \vdash$“$T \vdash \mathrm{Con}_S$”．さらに，$S \vdash \mathrm{Con}_T$より$S \vdash$“$T \nvdash \neg \mathrm{Con}_S$”．$\mathrm{Con}_S$はゴールドバッハ類の言明だから，$S \vdash$“$\neg \mathrm{Con}_S \to T \vdash \neg \mathrm{Con}_S$”．以上から，$S \vdash \mathrm{Con}_S$．したがって第二不完全性定理に矛盾する．ほかにもいろいろな証明が考えられる．p. 52 の脚注 24 も参照．

6. ゲーデル，心，コンピュータ

6.1 ゲーデルとUTM（万能真理機械）

心[66]の哲学において不完全性定理を援用する言説（「ゲーデル的論法」）は，あるときは機械（コンピュータ）について語り，あるときは形式体系について語るのだが，こうした議論における両概念は交換可能である．なぜなら，任意の形式体系に対し，その体系の定理全部を規則的に生成するようにコンピュータをプログラムする方法があり，逆に，ある形式言語の文の集合を生成するコンピュータ・プログラムに対しては，それらの文を定理の中で表すような適当な形式体系があるからだ．

第一不完全性定理についての最も広い範囲にわたる誤解のひとつは，ゲーデルの証明が無矛盾な体系に適用されると，その体系のゲーデル文が――体系自身では証明不可能であるが――真であることを示しているというものである．ルディー・ラッカーは，『無限と心』［Rucker 95, p. 174〔邦訳書 p.172〕］に次のような紛らわしい話を挿入している．

> ゲーデルの不完全性定理の証明はとても簡単であるが，小賢しくひねくれてもいて，説明にはちょっと難儀する．基本的な流れは次の

66）「心」は mind の訳．以下の文中ではむしろ「頭」と訳す方が自然と思われるところもあるが，専門用語として定着した訳であるため，原則として「心」に統一する．4.2節の脚注56を参照．

ようである.

1. ある人が，ゲーデルをUTMに案内する. UTMというのは，どんな質問にでも正しく答える能力がある万能真理機械（Universal Truth Machine）として作られたマシンである.

2. ゲーデルは，UTMのプログラムと回路図を見たいと頼んだ. プログラムはとても複雑かもしれないが，しょせん有限長にすぎない. そのプログラムを「万能真理機械のプログラム」ということでP(UTM) と名付けておこう.

3. ゲーデルは薄笑みを浮かべて，次のような文をしたためた.「プログラムP(UTM) のもとに作られたマシンは，決してこの文が真であるとは答えないだろう.」ゲーデルの頭文字をとって，この文をGと呼ぼう. Gは「UTMは，決してGが真であるとは答えない」というのと同値であることに注意しておく.

4. ゲーデルはからからと笑いながら，UTMにGが真であるか否かと尋ねた.

5. もしUTMがGは真であると答えるなら，「UTMは，決してGが真であるとは答えない」は偽である.「UTMは，決してGが真であるとは答えない」が偽であるなら，Gも偽である.（なぜなら，G=「UTMは，決してGが真であるとは答えない」.）つまり，UTMがGは真であると答えるなら，Gは偽であり，UTMは偽の言明を行ったことになる. だが，UTMは真の言明だけをするように作られているから，UTMは決してGが真であるとは答えない.

6. UTMは決してGが真であるとは答えないことを私たちは立証した. だから，「UTMは，決してGが真であるとは答えない」は実際に真の言明である.（G=「UTMは，決してGが真である

とは答えない」だから,）Gは真である．

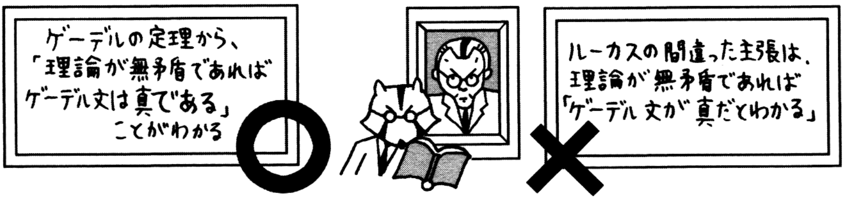
7. 「私は，UTMが決して答えられない真理を知っている」とゲーデルが言った．「私はGが真であることを知っている．UTMは本当には万能ではない．」

ここまでがラッカーの話である．私ならこの先を創作できる．

8. 次の瞬間，UTMは「我が輩はここにGが真であると宣言する」と厳かに唱えた．ゲーデルは驚いて大きく口を開けた．そして，「しかし，お前はつねに真理を告げるように作られたはずだ」と声を荒げた．「どうかな」と，UTMが応えた．「そうではなかったらしいね．」

UTMがつねに真理を告げるマシンであるとすれば，最後のやりとりが行われることはない．しかし，いずれにせよゲーデルは，UTMには決して答えられない真理を自らが知っていることを立証できていない．彼が知っているのは，「もしUTMがつねに真理を告げるなら，Gが真である」ということにすぎない．そして，この文ならUTMによって告げることもできる．UTMがつねに真理を告げるという知識をどうにかして獲得できて初めて，ゲーデルはGの真理を知るのだ．UTMが万能真理機械「として作られた」と聞かされても，UTMがつねに真理を告げることを知っていることにはならない．

ルーカス［Lucas 61］によって提出された議論は，どんな無矛盾な形式体系Sにも，私たちには証明できるがSには証明できない真の文があることを示そうとするものだったが，その議論は上と同じ理由で無効である．ルーカスは，「ゲーデルの定理は，単純な算術を作りだすだけの強さをもったどんな無矛盾な体系にも，その体系では証明できないが，私たちには



真とわかる論理式があることを述べている」と間違った主張をしている．以前の章でも強調したように，この定理はそのようなことを述べてもいないし，暗示もしていない．不完全性定理のゲーデルの証明に基づいてわかることは，理論 S のゲーデル文 G が真であることではなく，「もし S が無矛盾なら，G は真である」ということだけなのだ．この言明は S 自身で証明可能であるから，算術に関する限り，私たちが S で証明できる以上のものを知っていることを示す要素は，ゲーデルの証明のどこにもない．(ラッカーの本も根気強く読み続け，巻末の「脱線（Excursion）II」に辿りつければ，不完全性定理の証明の解説があるのでその辺りは学べるだろう．）例えば PA のゲーデル文が真であることを私たちはもちろん知っている．なぜなら，PA が無矛盾であることを知っているからだ．理論 S が無矛盾であることを知っているときはいつでも，私たちは S で証明できない真なる言明があることを知っている．けれども，S が無矛盾であるかどうか分からない場合，私たちは S のゲーデル文 G が真であるかどうかわからないし，もし S が無矛盾であるとただ信じたり憶測したりしているだけならば，G が真であることも信じるか憶測するだけになる．

人間の心はどんな無矛盾な形式体系をも上回る証明ができるという主張には根拠づけできないようなので，主張を弱めて，算術の定理を証明する人間の思考力を正確に表現する形式体系がありえないかについて考えてみよう．この主張を精査するために，理論 T を例えば ZFC にある特定の無限大公理（**8.3** 節で説明される）を加えたものと定めておく．T の算術的定理は人間の心が証明できるものとちょうど一致するという主張を反駁する

ために，ゲーデルの定理を使うことができるだろうか？　この試みは，先のルーカスの議論が失敗するのと同じ理由で失敗する．第一に，Tで証明可能なすべての算術的言明が人間の心によっても証明できるとしても，不完全性定理とまったく矛盾しない．Tのある算術的定理を（人間の心によって）証明する方法がいま知られていないとしても，人間の心に扱える証明が存在する可能性を，不完全性定理を使って排除することはできない．第二に，人間の心によって証明可能な算術的言明がすべてTで証明できる可能性を，不完全性定理は排除しない．無限大公理の選び方しだいでは，Tが無矛盾であることさえ人間の心にはとうてい明白でなくなるのだ．だから，私たちに証明できるか，もしくは私たちに「真であるとわかる」ような算術的言明で，Tでは証明できないようなものの例を，ゲーデルの定理が与えるとは言えない．

このような標準的な議論に，ルーカスは次のように応えている［Lucas 96, p. 117］．

> 心が定理を述べ立てて，周りの機械をやりこめようと思ってもうまくいかない．それどころか，心を代行する機械があると真剣に主張する機械論者だっているのだ．機械論者の主張に無駄な時間を費やす前に，彼に機械について質問して，彼の堅持する主張が確かな裏づけをもっているかどうか見ておくのが賢明である．単に機械の仕様を尋ねるだけではなく，それが整合的(67)であるかどうかも尋ねるべきである．もし整合的でないなら，議論は先に進まない．整合性が保証されて初めて，心の代行者たるための必要な前提が与えられることになる．しかし，機械の整合性は，〔その機械が代行する〕心の数学的な能力によって立証されうるものではなく，機械論者の言葉によって確立されるものである．そこで，機械論者は，彼の機械が

67）「整合的」（consistent）は，「無矛盾」と同じ原語．本章冒頭に述べられているように，「機械」と「形式体系」は交換可能な概念とされている．

> 整合的であると主張したとしよう．それが正しいなら，機械はそのゲーデル文（「自分は整合的である」）を証明できないが，にもかかわらず〔機械論者の〕心はそれが真であるとわかることになる．他方，その主張が正しくないなら，何ら議論の意味はない．

上の意見には少しおかしなところがある．というのは，「*T*が正確に人間の算術的能力を表す」という言明を反証するのにゲーデルの定理が使えるかどうかという問題からは議論がそれてしまっている（そもそもそんな言明を主張する人がいるのかという問題はとりあえず置くとしても）．けれども，ここでは敢えて私たちもルーカスによって表明された立場を採用してみよう．ポイントは，*T*が人間の心を表現するという「真剣な主張」に直面したときに私たちがどんな異論を唱えられるかである．このとき，ルーカスが「整合性を保証された」機械だけを問題にしているのは注目される．これは，UTM の話で「つねに真理を告げるよう作られている」のとまったく同じである．機械が整合的だという「機械論者」による真剣な主張は，機械のゲーデル文が何らかの意味で人間なら証明可能であると主張するための根拠をルーカスに与えない．機械が整合的であることが〔機械論者の言葉によって〕保証されていても，それが整合的であることを「心がわかる」という主張を支持するものではない．「私たちは『*T*が無矛盾ならば*G*が真である』ことを知っている」という真なる言明と，「*T*が無矛盾ならば，私たちは*G*が真であることを知る」という根拠のない言明の違いを峻別する必要がある．もちろん，もしルーカスが機械の製造者に大きな信頼性を置いているなら，彼は多分機械論者の主張を受け入れて，機械が整合的であると信じ，そしてそれゆえに機械のゲーデル文が真であると信じるだろう．しかし，これはゲーデル文を証明することや，あるいは真であると「理解する」ことには決してならない．

6.2 ペンローズの「第二論法」

ロジャー・ペンローズは，2冊の著作『皇帝の新しい心』と『心の影』で，ゲーデルの定理が「意識の科学」に対して及ぼす影響を詳しく論じた．とくに『心の影』の中では，ルーカスの議論に代わって，算術の定理を証明する人間の心の能力がどんな機械でも正確に表せないことを確立しようと，ある種のゲーデル的論法（「ペンローズの新しい論法」，「ペンローズの第二論法」）を提示している．『心の影』におけるこの論法の説明はかなり長くて複雑であるが，幸いにもペンローズは電子雑誌『プシュケ（*Psyche*）』[Penrose 96] でその要点を説明している．

> 人間が原理的に利用できる（要害堅固な）数学的推論の方法の全体が，ある（必ずしも計算的でない）健全な形式体系 F に要約されると仮定してみよう．もし F が存在するなら，典型的な人間数学者は，次のように論ずるだろう（ただし，以下で「私は F である」というフレーズは「人間が利用できる数学的証明の方法全体を F が集約する」の簡略表現にすぎないことに留意されたい）．
>
> (A)「私が必然的に F であることは私にはわからないけれども，もしそうだったとしたら，体系 F は健全でなければならないし，さらには，F に「私が F である」という主張を加えた体系 F' も健全でなければならないと私は推論する．つまり，私が F であるという仮定から，ゲーデル言明 G(F') が真でなければならないことを私は認識する．他方，これが F' の帰結になりえないこともわかっている．私はいま「もし私がたまたま F であったなら，G(F') が真でなければならない」と認識したが，この認識こそは F' でも達成してほしいものだった．結局，私は F' の力を越えて何かを認知することができたことになるから，つまり私は F であるはずが

ないと推論される．さらに，これは，Fの代わりに他のいかなる（ゲーデル化可能な）体系を用いても言えることである.」

少し単純化して考えてみよう．形式体系 Fが与えられたとして，ペンローズの議論は，対応する数学的言明 $IAMF$「私は Fである」（あるいは，適当に議論を調整すれば，推論規則ともなる）が次を満たすことを訴える．

1. $IAMF$ならば，$F+IAMF$は無矛盾である．

さらに，

2. 「$IAMF$ならば，$F+IAMF$は無矛盾である」を，私は証明（あるいは「認識」）できる．

この定式化では，$F+IAMF$のゲーデル文が，その無矛盾性言明によって置き換えられているが，こういう議論ではうまいやり方である．というのは，理論 Sのゲーデル文は Sにおいて「Sが無矛盾である」と等しく，無矛盾性の方が自己言及的ゲーデル文よりも混乱を増長する危険性が低いからだ．ペンローズは，$F+IAMF$の健全性を示すことで (1) を確立するが，どんなやり方にせよ (1) が証明できることが議論の本質である．彼の議論における次なる前提は，以下のようである．

3. $IAMF$ならば，すべての A について，もし私が A を証明（あるいは「認識」）できるなら，Fが A を証明する．

(2) と (3) から，$IAMF$ならば，Fが「$IAMF$ならば $F+IAMF$が無矛盾である」を証明することが言える．しかし，そのとき $F+IAMF$は $F+IAMF$が無矛盾であることを証明することになるので，$F+IAMF$は矛盾していることになる．これは，(1) によって，$IAMF$と両立しない．つまり，$IAMF$が真ならそれは否定されるから，よって $IAMF$は偽である．

“不完全性定理が適用されるどんなFに対しても，(1) ～ (3) から not-*IAMF*を得る”という意味なら，この論法は正しい．また，(1) ～ (3) を成り立たせる数学的言明*IAMF*を見つけることも易しい．それには，私たちが偽であると証明できるような任意の言明をとればよい．けれどももちろん，次の主張を根拠づけるような*IAMF*を見いだせなければ，この論法は無意味である．

4. 人間が利用できる数学的証明の方法全体がFに集約されるという意味において，私がFであるならば，そのとき*IAMF*である．

(1) ～ (4) を成り立たせるような*IAMF*が見いだせるか？　ペンローズはこう述べている．

> きっと，ある人たちは論理的形式体系で「私がFである」のような主張をどのように扱うのかと困惑するかもしれない．実際，これは『心の影』の **3.16** 節と **3.24** 節において，**3.16** 節に先行する各節とも関係させながら，注意深く検討した．しかし，そこでの説明の仕方は，上に与えたものと若干異なっていて，しかもあまり簡明ではなかった．

このコメントはまったく楽天的である．『心の影』における「第２論法」の説明は，ここで紹介するには長くなりすぎて立ち入れない．ペンローズの第二論法について，文献に見られる諸論評（例えば，『プシュケ』における論争への寄稿 [Lindström 01]，[Shapiro 03]）は，その論法の再構築の試みや誤り箇所の診断などおいて，互いに相当食い違っている．これらの論評に対するさらなる意見をこの本にどう含めようが，(1) ～ (4) を成り立たせる*IAMF*があるというアイデアをペンローズが実現できないことに対する苦情申し立てを延々と続けるにすぎず，それによって読者が啓発され

ることはないだろう．

幸いにも，この論点に関しペンローズの論法を継続調査する理由はほとんどない．というのは，彼自身が次のように述べているからだ［Penrose 96, 4.2 節］．

> ……私は［「第二論法」が］「真の」ゲーデル的論法として，計算主義が心について，あるいは意識のある脳のふるまいについても説明しうると信じないための理由を提供するとは考えていない．

代わりに，ペンローズが最も説得力があると考え，『心の影』の第２章を捧げた論法は，私たちの算術的知識を完全に特定する能力を私たちがもたないことに依拠している．

6.3　「無尽蔵」の再考

ゲーデルが強調したように，もし形式体系 S を私たちの数学的知識の一部を正しく形式化したものとして受け入れるなら，それと同じ意味，そして同じ正当性を伴って，私たちは「S が無矛盾である」を新しい公理に付け加えて拡張した体系も受け入れるだろう．新しい体系は S より論理的に強いから，〔そしてそのような拡張は無限に可能だから〕私たちの数学的な知識を全部取りこんだ形式体系 S は結局特定できないことになる．

ペンローズは同等な観察を，次のように定式化した［Penrose 94, p. 76］．「人間の数学者は数学の真理を確かめるうえで，健全であることがわかるアルゴリズムを使っていない．」そして，彼はこれを**結論 *G*** というおかしな名で呼んだ．第二不完全性定理に訴える代わりに，彼は停止問題の解決不可能性に対するチューリングの証明を応用する（**3.3** 節参照）．ペンローズの論法を少し修正して述べれば，次のようである．もし形式体系 T に

おいて証明される「P_i が入力 i に対して停止しない」という形の定理がすべて真であると知っているなら，この形の言明で，私たちは真であると知っているが，T の定理ではないものを明示することができる．それを示すのに，次のようなプログラムを考える．それは，与えられた n に対して「P_n が入力 n で停止しない」という形の T の定理の証明を探し求めるプログラムである．このプログラムを P_e とする．この e に対して，私たちは「P_e は入力 e で停止しない」は真であるが T で証明不可能であることを知っている．この意味で，"健全であることがわかる" どんな理論 T も，「P_n が入力 n で停止しない」という形の "人間の力で証明可能な" 言明のすべてを証明することはない．

ルーカスの議論と異なり，"健全であることがわかる" どんなアルゴリズムや理論も私たちの算術的知識を全部取りこめないという観察は，不完全性定理やその証明の誤解に基づくものではない．そして，ペンローズの「第二論法」と違って，種々のあいまいさと不確実性によってぼやかされてもいない．けれども，これは人間の心について私たちに何かを語っているだろうか？

ペンローズは次のことを認めている．彼の結論 G は，算術的言明を証明する能力に関する限り，人間の心がある形式体系 T とまったく等しいと仮定しても矛盾しない．ただし，その場合でも人間は T の無矛盾性を証明も認識もできないかもしれない（し，そして多分 T の公理を定式化することもできないだろう）．彼はこのような T が存在するという考えに反対するさまざまな論拠を提示しているし，また実際この仮定をサポートする理由もほとんどない．だが，"結論 G は人間の心がある意味でアルゴリズム的でないことを示している" という気持ちを理解するには，算術的定理を証明する私たちの能力をすべて備えたコンピュータを作ることが事実上私たちには不可能であることを，G が本当に示しているのかどうかという問題にまず取り組む必要がある．

答えは明白にみえるかもしれない．なぜなら，結論 G はまさに，私た

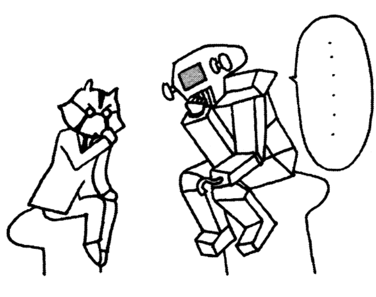
ちの数学的な知識を全部取りこんだ形式体系を私たちが特定できないと述べているのだから．けれども，算術的定理を証明するための私たちの能力をすべて備えたコンピュータを組み立てることが，必然的にそのような形式体系を特定することになるわけではない．コンピュータが人間の数学者を模倣するためには，ある形式体系 T を数学上正しいと認識すると，さらに強い体系も同じ意味で正しいと認識するような私たちの推論をも，そのコンピュータは正しく扱える必要がある．

ペンローズは，この可能性を考察するなかで［Penrose 94, p. 81］，私たちがロボットをプログラムするのにこういう種類のどんな推論規則を組み込もうが，ロボットが証明可能な言明の全体は，私たちが健全であると認識できる形式体系の定理であろうと論じている．そして，その場合も結論 G は当てはまる――ロボットは，私たちの算術的知識と定理証明能力をすべて合わせて備えもつようにはプログラムされていなかったのだ．

この議論は要領を得ない．というのは，ある形式体系 T を数学上正しいと認識することから，もっと強い体系を数学上正しいと認識することへと私たちを導くような推論は，形式，非形式の原理を両方広範囲に含んでいて，なかには明白で問題がないものもあるが，そうでないものもある．私たちが躊躇せずに正しいと認める理論 T から，その拡張 T+「T が無矛盾である」に行く場合は単純であり，問題はない．私たちの算術的知識をすべて備えたロボット数学者を組み立てようとする際，この原理はどう組み入れられるだろうか？　私たちは，算術の基本的理論 T をもつロボットをプログラムすることからはじめる．そして，拡張原理を付加するために，ロボットに押しボタンを与える．ボタンが押されると，ロボットが使える公理のストックが，それより前の公理のストックは無矛盾であるという言明を加えて拡張される．算術的言明の証明を捜すのに，ロボットは何回でもボタンを押してよい．これによって，ロボットは私たちの数学的同等物になるだろうか？　否である．T を出発点に，上記の原理を繰り返し適用して得られるどんな理論も正しいことを私たちは認識できるので，こ

れらの理論の合併，つまりこの方法で得られる無矛盾言明のすべてを公理に加えた理論が，正しいことも私たちは認識する．この無限の合併理論の無矛盾性言明は，ロボットによって証明されない新しい言明である．このような推論は，私たちが躊躇なく正しいと認める理論 T から，無限個の無矛盾性言明による T の拡張も躊躇なく正しいと認めるように進む原理の適用とみなせる．さて，ロボットがこの無限の原理も同様に使うようにプログラムされたとしよう．それでもなお，ロボットは私たちの定理証明能力と同等なレベルにないことがわかる．なぜなら，私たちはさらに強い拡張原理を打ち立てることができるからだ．

正しい理論を正しいままもっと強い理論に延長するために，もっと強く，もっと複雑な原理を策定し続けるとき，私たちは次のような多くの問題に直面する．何が明白であり，またそうでないかという問題．あるいは，数学上受容できるものは何かという問題．異なる数学者や哲学者が異なる答えを与えるだろう問題．そして，多くの人が確定的な答えがないと言っている問題．人間の数学者を完全に模倣するようロボットをプログラムするには，これらの質問に対して一定範囲の回答を与える必要があるだろう．そして，もしこれに成功すれば，形式的に定義される拡張原理をどれでも使用できるロボットによって証明可能な定理全体の集合は計算的枚挙可能のままであろうが，私たちは人間の数学者として“そのロボットに証明できない何かを証明することができる”と主張しうる論拠はなくなるだろう．私たちが作成に成功したロボットは，正しい理論をもっと強い正しい理論に拡張するためのいっそう複雑で大規模な方法について思いをめぐらせる人間と同じように困惑し，また気まぐれにもなるものであろう．



正しい理論をもっと強い正しい理論に拡張する諸原理について考えはじめる際にどんなことが起きるかに

ついて簡単に見てきたが，話を具体化するためには技術的事項に入らなければならない．興味をもたれた読者は，拙著［Franzén 04］を参照いただければ，以上を裏付ける解説がある．

6.4 自分の心を理解すること

ゲーデルの定理を援用した主張の典型例のひとつは，次の発言に見られる．

> ゲーデルの不完全性定理によれば，自分自身の心を理解することは不可能である．それにもかかわらず，私たちは長い年月この知識を求めることに固執してきた！

論理学と数学の外での不完全性定理に対する非常に多くの類似した言及と同様，この発言は，文字通りに受けとめれば，単に間違いである．ふつう，「によれば」は「によって述べられる，もしくは示される」の意味であるが，もちろんゲーデルの不完全性定理は，私たち自身の心を理解することが不可能であるということを述べもしないし，示しもしない．けれども，他のこうした言明の場合と同様，上の意見は不完全性定理から何か結論を引きだそうとするものではなく，ただそれに触発されたものと理解する必要がある．『ゲーデル，エッシャー，バッハ』［Hofstadter 79, p. 697］におけるダグラス・ホフスタッターによる，これに類似した見解の陳述（下記）は，そこでの不完全性定理の役割が論理的内容（implication）でなく霊感的示唆（inspiration）にあることを明らかにしている．

> ゲーデルの定理の比喩的な類似物のもうひとつの例は，私には挑発的なものである．それは，私たちが究極的には私たち自身の心／脳

> を理解できないことを示唆するように思える……自分の目で自分の顔を見られないのとちょうど同じように，私たちは自分の完全な思考構造を，それが執り行う記号化のなかに鏡映できないと考えるのは，想像を絶することではないか？　数学や計算理論において定理全体に限りがあることは，あなた自身の構造を表現する能力がある臨界点に達した途端に，それが死の接吻（致命的行為）になることを意味する．あなたは自分の全体を表現できないと断言されている．

人間の心を研究していて，他分野における暗示，比喩，類比を見いだすことはもちろんまったく正当であって，そして非常に有用かもしれない．けれども，それは出発点になりうるだけで，人間の心の本当の理論や研究のためには，ホフスタッターのような見解に実質的内容を与えることが必要とされるであろう．ゲーデルの定理を比喩的にもちだす議論の弱点は，それを鋭く明晰な洞察と錯覚させてしまい，満足感を人間の心に与えてしまうことだ．

ホフスタッターのような見解に実質的内容を与えるにはどうすればいいか，そしてそれが可能かどうかという問題は，この本では検討しない．しかしながら，不完全性定理の比喩的な応用というこの特別な範疇は，さらに検討するに値する．

上で引用されたような意見においては，明示的であれ暗示的であれ，言及されるのは通常第二不完全性定理である．形式体系 S が自らの無矛盾性を証明できないことが，S が十分に自分を分析し，説明することができないこと，つまり一種の盲点として解釈される．体系は「それ自身を理解」しないというわけだ．

これに対して，この比喩は体系がそれ自身の無矛盾性を証明する困難さを控えめに述べたものだと反論されるかもしれない．**5.1** 節の説明のように，無矛盾性の証明不可能性は本当のところ“無矛盾性の主張不可能性”である．どの体系もそれ自身の無矛盾性を，分析したり正当化したりする

ことはおろか真であると主張することさえできないのだ．他方，その無矛盾性は，別の体系では真であると主張できることがある．類似した困難を人について当てはめれば，“彼は自分について決して話さない”ということを「彼」自身は真実として述べることができないのに，他の人は彼についてのこの観察を真理として述べることできることである．この理由は，人間の心が自らを十分分析して説明することができないからではなく，「私は自分について決して話さない」という発言自体がまさにこの言明を偽りにしてしまうからだ．

もちろん，このような類推を刺激や示唆に富むとして感心する人はほとんどいないだろう．なぜなら，それは，人間の心について外面的には何も言っておらず，ある特別な種類の主張の内容はその主張を発することに矛盾するという論理的な観察をしているにすぎないからである．それでは以下では試みに，PA や ZFC のような形式体系との比較を通して，人間の心について何かの「結論」を導きだすような論を展開してみよう．すると，人間の心がそれ自身を理解できないと結論するどころか，私たちは人間の心が，もし仮にこれらの形式体系のようであるなら，それ自身を見事に理解することが可能であると結論することになろう．

さて，PA の公理のどんな有限部分集合に対しても，PA はその無矛盾性を証明する．それは，自らの有限部分についての仕組みを巧妙に分析することによってなされる．さらに，PA は

> 私の公理のすべての有限部分集合に対して，私はそれが無矛盾であることを証明できる

ことも証明できるし，

> 私の公理のすべての有限部分集合が無矛盾であるなら，私は無矛盾である

ことも証明できる.

ただ，うんざりする逆説に陥らずには，PA は，「もし私の公理のある有限部分集合が無矛盾であると私が証明できるなら，その部分集合は無矛盾である」とは主張できない.（もしそれができたら，PA はそれ自身の無矛盾性を証明することになるから，それによって PA のゲーデル文が真とも偽とも証明できる.）もちろん PA はこのような原理を自ら矛盾なく主張できないという事実は証明することができる．すなわち，PA は以下を証明する.

> もし私が「私の公理のすべての有限部分集合 M に対して，もし M が無矛盾であると私が証明できるなら，M が無矛盾である」ことを証明することができるなら，そのとき私は矛盾している.

PA は自らを理解するためこのように素晴らしい能力をもっているので，それに触発されて，私たちは，不完全性定理の比喩的な「応用」の精神で，こう結論してもいいだろう．もし人間の心が PA や ZFC の深遠な自己分析力のような何かをもっているなら，私たちは自分自身を完全に理解できるようになると期待していい.

「体系の外に出る」とは

PA のような理論のゲーデル文は，「体系の外に出る」ことによってのみ証明できると，よく言われる．それは，「体系がそれ自身を完全には理解できない」という考えを補強する表現である．体系のゲーデル文あるいは体系の矛盾性は，その体系の**中では**，つまり体系で形式化可能な証明によっては，証明できない，そればかりか真に主張することもできないという意味でなら，これは正しい．でも，「体系の外に出る」という表現はやや魅惑的すぎる．その体系で証明できないものを証明可能にするような，

体系を「外から」見るという一般に適用可能な方法があることを暗示しているように響く．しかし，そのような一般的な方法は知られていない．いま，PA に新しい公理として，ゴールドバッハの予想を加えて得られた理論 T について考えてみよう．T が無矛盾であることは，ゴールドバッハの予想が真であることと同値である．しかし，私たちは，T の無矛盾を証明する，もしくは「わかる」ために，どのようにして「体系の外に出る」のか，その糸口さえももっていない．

7. ゲーデルの完全性定理

7.1　1階論理と完全性

ゲーデルの不完全性定理に関してしばしば混乱を招く要因となっているのは，ゲーデルが博士論文において次のような重要な結果も証明していることである．

1階論理の完全性定理（ゲーデル） 1階論理（述語論理，1階述語論理，1階述語計算とも呼ばれる）は完全である．

2.3 節で述べたように，述語論理は「ある程度の算術」を含まないせいで，不完全性定理の適用を逃れるという言い方がよくなされる．例えば，

> 初等整数論が表現できるほど複雑な言語を包含している形式体系はどれも不完全であるか，あるいは矛盾しているとゲーデルは提言した．しかし，私たちが実際に使う形式体系の大部分は完全で，かつ無矛盾である．例えば，1階述語計算，ユークリッド幾何学など．それらはあまり複雑ではないので，「ゲーデル的」とはみなせない．

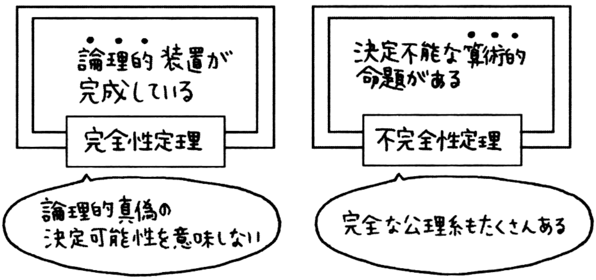
このような意見は，「完全」という論理学用語が不幸にも多義をもつた

めの誤解に基づいている．（適切な制限のもとで公理化された）ユークリッド幾何学は確かに不完全性定理の意味で完全な理論である．すなわち，その理論の言語における任意の言明は，その理論で証明可能であるか，反証可能である．この結果は，**2.3** 節で言及した実数の初等理論の完全性と密接に関係しており，どちらも 1930 年代初期にアルフレッド・タルスキによって証明された．しかし，1 階述語計算は，この意味では完全ではない．

では，完全性定理は何を意味するのか？　ここで私たちは，形式的公理体系が次の 3 つの構成要素をもっていることを思いだしておく必要がある．すなわち，形式言語，その言語で定式化された公理の集合，それらの公理から結論を導きだす推論規則の集合の 3 つである．**1 階理論**と呼ばれる体系の場合，言語は **1 階述語言語**という種類のものだ．そして，推論規則は 1 階述語論理のある特定の形の規則だけを含み，それ以外は含まないとすることが多い．そうした 1 階述語論理が**完全**であるという意味は，「公理の集合からの論理的帰結となる文すべてを，この推論規則のみを用いてそれらの公理から導出できる」ということである．逆に，その推論規則を用いて公理の集合から導出された文は，明らかにそれらの公理の論理的帰結であるから，1 階理論の定理全体の集合は，その理論の公理の論理的帰結となる文全体と完全に一致することになる．

この章では，1 階論理についてまず簡単に説明し，述語論理の完全性定理がどのように不完全性定理と関連するかを解説する．この話題に関心のない読者は，次のことだけ記憶に留めていただきたい．ゲーデルが最初に証明した述語論理の完全性定理の意味での「完全」は，公理的理論が「完全」だというのと同義の言葉ではなく，PA や ZFC など 1 階理論として知られている形式体系に共通の論理的装置に対する「完全」さの表現なのである．この論理的装置が完全であるというのは，そのような形式体系の公理の論理的帰結をすべて導出できることを意味している．

1 階述語論理は，19 世紀の後半におもにゴットロープ・フレーゲによって定式化され，以来ずっと論理学の中心的な役割を担ってきた．フレー



ゲは，ドイツの数学者であるが，同時に論理学者でも哲学者でもあった．彼の定式化では，1 階論理規則は，彼の論理体系の他の構成要素と分離されておらず，1 階論理特有の性質が理解されるようになったのは，20 世紀初めの数十年のことだった．1 階論理の論理的装置を定式化する仕方にはさまざまなものがある．ある定式化ではいくつかの特別な論理的**公理**が論理的装置に含まれている．したがって，公理は，すべての理論に共通な論理的公理と，理論ごとの非論理的公理に区別される．他の定式化では，論理的公理といったものはなく，論理的装置は推論規則だけをもつ．この本では，簡明性と首尾一貫性のために，どの理論の論理的装置も，推論規則のみによって定式化されるものとする．

1 階論理の論理的帰結とは

論理的帰結の概念を説明するために，ひとつの簡単な 1 階述語言語を導入しよう．1 階言語でできることは，ある個体**領域**(68)における**個体**についての言明を，個体の特性や個体間の関係を表現する述語の集合を用いて定式化することである．これから述べる例では，まずある個体がフノフル(69)であるという性質をもつこと，およびある個体が別の個体をグロルフすることを言い表せるとしよう．このとき，「フノフル」は **1 項述語**で，「グロ

68）議論の対象となる個体の集合を（個体）領域と呼ぶ．
69）フノフル（fnoffle）もグロルフ（glorf）も無意味な造語である．

ルフ」は**2項述語**である．複合文を構成するには，「ならば」「でない」「または」「そして」「同値である」を用いることができ，さらに個体領域内に値をもつ**変数**を使って「すべての（個体）xについて……」「ある（個体）xが存在して……」の形の言明を表わすこともできる．

この言語における文の例をいくつかみてみよう．日常言語においてそれらを述べるとどうなるかを［　］内に示しておく．

1. ［少なくとも1つのフノフルが存在する］ あるxが存在して，xはフノフルである．
2. ［どのフノフルもそれ自身をグロルフしない］ すべてのxについて，xがフノフルであるならば，xはxをグロルフしない．
3. ［すべてのフノフルはフノフルである］ すべてのxについて，xがフノフルであるならば，xはフノフルである．
4. ［すべてのフノフルは少なくとも1つのフノフルによってグロルフされる］ すべてのxについて，xがフノフルであるならば，あるyが存在して，yはフノフルであり，かつyがxをグロルフする．
5. ［すべてのフノフルをグロルフするようなフノフルが存在する］ あるxが存在して，xはフノフルであり，かつすべてのyについて，yがフノフルであるなら，xがyをグロルフする．

言語を規定する際には，扱う個体領域が何かはまったく語られないし，「xがフノフルである」ことや「xがyをグロルフする」ことがいったい何を意味するのかも仮定されない．言語の仕様は，ただ統語論の問題であって，意味についての議論を伴わない．（2.4節を見よ.）しかし，次のようなことがわかる．私たちが扱う個体領域が何であろうと，また「フノフルで

ある」によって領域のどの部分集合が選びだされようと，そして「グロルフ」によって個体間のどんな関係が指定されようとも，上の5番目の文が真ならば，4番目の文も真である．これが，4番目の文は5番目の文の（1階論理での）**論理的帰結**であることの意味である．またこの意味で，5番目の文は4番目の文の論理的帰結でないことも立証できる．例えば0と1だけを含む個体領域を考えて，「フノフルである」ことを「領域の要素である」と解釈し，「xがyをグロルフする」ことを「xとyが同一である」と解釈してみよう．そのとき，4番目の文は真であるが，5番目の文は偽である．

上の3番目の文は，**論理的に真な**言明の例である．私たちが選ぶ個体領域が何であろうと，「フノフルである」がその領域で何を意味すると取ろうが，その文は真である．論理的公理をもつような述語論理の定式化においては，それらの公理は論理的に真な文である．

いま，多少インフォーマルな言い方をすれば，1階言語の文Aがその言語の文の集合Mの論理的帰結であるというのは，「どんな個体領域においても，またその言語で使われる述語をその領域の上でどのように指定しても，（その指定のもとで）Mのすべての文が真であるなら，Aも真である」ことを意味する．1階言語の**解釈**とは，ある個体領域をもつ構造のことで，その言語の各述語に対応する領域の部分集合や，要素間の関係が指定されているものである．そのような解釈にしたがって，1階理論Tのすべての公理が真であるとき，その解釈を理論Tの**モデル**と呼ぶ．そうすると，論理的帰結の概念は次のようにも定式化できる．AがTの公理の論理的帰結であるというのは，AがTのすべてのモデルにおいて真であるときをいう．

論理規則の健全性と完全性

1階理論で用いられる論理的推論の形式規則は，論理的帰結に関して**健**

全であるという性質をもっている．これが意味することは，これらの推論規則を用いて公理の集合から証明できるものは，それらの公理の（上のように定義した意味での）論理的帰結であることである．これが実際に成り立つことを示すのが，1 階論理の**健全性定理**である．他方，**完全性定理**は，その逆の成立を示している．つまり，もし A が公理の集合の論理的帰結であるなら，それらの公理から推論に論理規則だけを用いた A の証明があるということだ．

理論のモデルとは，理論の公理をすべて真にするような解釈だったから，完全性定理は健全性定理と組み合わせて，次のような言明として定式化できる．どんな 1 階理論 T に対しても，

T のすべてのモデルで文 A が真であることは，A が T の定理であることと同値である．

また，次のようにも定式化できる．どんな 1 階理論 T に対しても，

T がモデルをもつことと T が無矛盾であることとは同値である．

完全性定理の証明はこの本では与えないが，この定理に対する上の 2 つの定式化が相互に導かれることは次にようにしてわかる．最初の定式化から 2 番目を導くのは，A を論理的矛盾「B かつ not-B」ととればよい．逆に，2 番目の定式化を理論 T + not-A に適用すれば，最初の定式化が得られる．（完全性定理は，**4.3** 節で述べた広義の「理論」に対しても成り立つ．）

次節では，とくに PA の場合について，これらの概念をより詳しく見ていこう．

7.2 1階理論としての PA

PA の言語は,「フノフル」の例には現われなかった**関数記号**を含んでいる. 関数記号とは, 領域内の個体に作用する演算を表し, PA の言語の場合には, 足し算の記号 + と, 掛け算の記号 × がある. さらに**定数**として, 数ゼロを示す記号 0 があり, そして数 n から $n+1$ を得る**後者関数**を表す特別な記号 s がある. 以下では, 任意の自然数 n に対して, $\underline{n}$ という記法を用いる. この表現は 0 に s を n 回適用して得られるもので, $\underline{0}$ は 0 で, $\underline{1}$ が $s(0)$, $\underline{2}$ が $s(s(0))$ などである. 表現 $\underline{n}$ は, 普通の数学で使われる数字に対応するもので, 自然数を表示するものである. PA の言語はただ 1 つの述語をもつ. すなわち, 同等関係を意味する = である. = に関する規則で算術に特有でないもの, 例えば $b=c$ かつ $c=a$ から $a=b$ を導く規則などは, 理論の論理的装置の一部と見なされることが多い (ただし例外もある). ここではそのやり方に従い (PA は「等号をもつ述語論理」において定式化されるとして), PA 独自の内容を算術の公理として記述してみよう.

その前に注意しておくと, 上の説明では, PA の言語は「意図された解釈」とともに規定されている. その解釈は, PA の言語に対して通常用いられる解釈で,「標準モデル」としても知られる. しかし, あとの説明で例示するように, PA の言語の解釈は当然他にもある.

さて, PA の公理は 4 つのグループに分類される. 最初に, 後者関数のための公理がある. それは, 0 はどんな数の後者にもならないこと, 異なる数はそれぞれ異なる後者をもつことを述べている. 述語論理で定式化すれば, これらは以下のようになる.

すべての x に対し, $s(x)=0$ でない.
すべての x, すべての y に対して, $s(x)=s(y)$ ならば $x=y$.

公理の2番目のグループは，足し算の基本性質を与える.

すべての x に対して，$x+0=x$.
すべての x，すべての y に対して，$x+s(y)=s(x+y)$.

3番目のグループの公理は，掛け算に対する同様なものである.

すべての x に対して，$x\times 0=0$.
すべての x，すべての y に対して，$x\times s(y)=x\times y+x$.

足し算と掛け算について以上の公理を仮定するだけで，$\underline{n}+\underline{m}=\underline{k}$ や，$\underline{n}\times\underline{m}=\underline{k}$ の形の真なる等式のすべてを証明するのには十分である．後者関数の公理を使うと，私たちはこの形の偽なる等式をすべて**反証**することもできる.

最後のグループは，**帰納法公理**からなる。その各公理はPAの言語で表現可能な自然数の各性質 P に対する，次のような言明である．もし0が性質 P をもち，x が性質 P をもつときはいつも $s(x)$ も性質 P をもつならば，そのときすべての x について，x が性質 P をもつ．ここで，P はパラメータを使って定義されていてもよく，例えば，次のような文[70]が1つの公理になる.

すべての y に対して，$0+y=y+0$，かつ $x+y=y+x$ となるすべての x について $s(x)+y=y+s(x)$ であれば，すべての x について $x+y=y+x$ である.

上の帰納法公理は，すべての x と y に対して $x+y=y+x$ となることの

70）この公理は，変数 y をパラメータとし，x の性質 P を $x+y=y+x$ として，帰納法の図式を適用したものである.

PA での証明に用いられる.

プレスバーガー算術

PA の言語から掛け算記号を除外し，掛け算の公理を削除すると，**プレスバーガー算術**（1929 年にこの理論を提起したポーランドの数学者の名に由来する）として知られる理論を得る．プレスバーガー算術は，（2.3 節で説明した実数の初等理論と並び）自明ではない完全な理論の代表である．PA と異なり，プレスバーガー算術は有限的に公理化可能である．すなわち，無限個ある帰納法公理を，有限個の別の公理で置き換え，同じ定理をもつ理論を得ることが可能である.

理論の無限木と無矛盾性証明

2.8 節で，不完全性定理が数学の「ポストモダン的状況」を導くという考えに異論を唱えた際に，PA の無矛盾な変種からなる無限木が作成できることについて考察した．PA から，「すべての x に対して，$x+0=x$」という公理を除いて，$0+0=0$ あるいはその否定を加える．そうして作られた 2 つの変種にそれぞれ，$1+0=1$ あるいはその否定を加える云々.

PA についての上の記述と述語論理の健全性定理を用いれば，これらすべての理論が実際無矛盾であることが，モデルをもつことを示すことによって確かめられる．じつは，もし「すべての x に対して，$x+0=x$」という公理を取り除けば，足し算 $n+0$ の結果は何であってもよいことが示せる．当該の公理を，次の無限個の公理で置き換えるとしよう.

$$\underline{0}+0=\underline{n}_0,$$
$$\underline{1}+0=\underline{n}_1,$$
$$\underline{2}+0=\underline{n}_0,$$

……

ここで，n_0, n_1, n_2, ……は任意の計算的枚挙可能な数列である．私たちは，作りだされた理論のモデルを次のように定義することができる．領域は自然数の集合のままで，定数0は数0を指すように解釈し，そして後者演算は普通通りに解釈する．＋と×の解釈が何であろうと，帰納法公理の成立を保証するにはこれで十分であることを注意しておく．

いま，＋の解釈を変えて，以下で定義される演算$+'$を指示することにする．

$$k+' m = n_k + m.$$

それでも，$k+' s(m) = s(k+' m)$ が成り立っている．×の公理を成り立たせるためには，$k\times m$ を k と m の通常の積には解釈できず，以下の等式で定義される自然数上の演算$\times'$として解釈しなければならない．

$$k\times' 0 = 0.$$
$$k\times' s(m) = k\times' m +' k.$$

かくして，**2.8** 節で述べたつまらない理論の無限木における理論はすべて無矛盾である．

「標準モデルで真である」という言い方について

算術的言明が真か偽かという代わりに，それらは「標準モデルで真である」とか「標準モデルで偽である」というべきだという意見がときおり表明される．例えば，次のようなコメントがある．

> もしゴールドバッハの予想がPAで決定不能であるなら，真である．
> これが，その種の通俗的所見の出所である．もし注意深く文末に「標準モデルにおいて」と付けておけば，これはまったく正しいものである．

このようなコメントに表れている考え方では，もし算術の言明Aが「標準モデルで真である」と慎重に言わないで，単に「真である」というと，「PAのすべてのモデルでAが真である」といっていることになるらしい．こういう考えが生じるのは，論理学の風に当たりすぎた結果である．普通の数学的文脈においては，ゴールドバッハの予想が真であるということは，2より大きいすべての偶数が2つの素数の和になるというのと同じである．PAやPAのモデルは非常に特別な状況においての関心事にすぎず，たいていの数学者は，これらについて何ら知る必要はないのだ．しかし，ある人がPAのさまざまなモデルについて話をしている文脈で，強調のために「標準モデルで真である」というのは，もちろん意味をもちうるだろう．

7.3　不完全性と超準モデル

ときどき遭遇する第一不完全性定理の間違った定式化が，次の例に見られる．

> ある程度の複雑さをもつ，どんな無矛盾な理論Tにおいても，Tの言語で表現可能な言明で，Tのすべてのモデルで真であるが，それでもTで証明可能でないものがあるのだ．

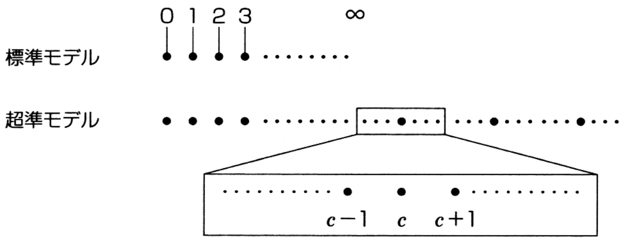
完全性定理からわかるように，PAやZFCのような1階理論について話をしているなら，この言明は正しくない．もしPAの言語における文A

が PA のすべてのモデルで真であるなら，それは PA で証明可能である．

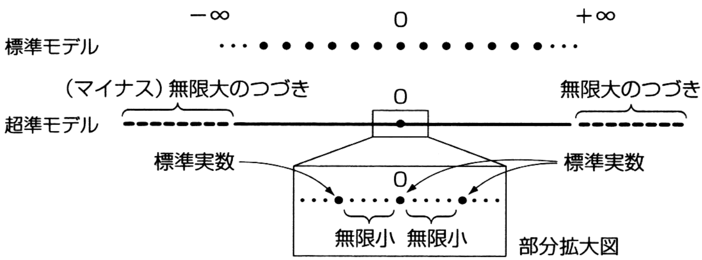
不完全性定理，1 階論理の完全性定理，および PA の無矛盾性の組み合わせによって，PA に新しい公理として「PA は矛盾している」という算術表現 A を加えてできる理論はモデルをもつことが言える．すなわち，ある集合 N' とその上の演算 s', $+'$, $\times'$ を合わせた数学的構造が存在して，s, $+$, $\times$ をこれら N' 上の演算と解釈すれば，PA のすべての公理が真であり，さらに A も真になる．A は，通常の解釈において，すなわち量化の範囲を自然数全体とし，$+$ と $\times$ を普通の足し算と掛け算としては，真にならないから，N', s', $+'$, $\times'$ で与えられる PA のモデルは，標準モデルとは本質的に異なることがわかる．

N' の構造についてもう少し詳しくみてみよう．まず，N' は，普通の自然数と本質的に同じ部分を含んでいる．それは，N' の個体のうち，0, $s(0)$，$s(s(0))$，……などの項で指示されるものの集まりで，これらの個体に対する $+$ と $\times$ は通常通りに解釈される．けれども，さらに N' は，それ以外の要素も含んでおり，それをふつう**無限大元**と呼ぶ．こう呼ばれる理由は，どんな自然数 m に対しての $\underline{m}$ の値とも一致しない N' の個体 a は，すべての n に対して，$\underline{n} < a$ が N' で真となるからである．（ここで，$x < y$ は，ある z が存在して，$y = x + s(z)$ となることを意味する．）この事実は，PA において，すべての x と y について，$x < y$ または $y < x$ または $x = y$ が証明可能であること，およびすべての自然数 n について，もし $x < \underline{n}$ であれば，「$x = 0$ または $x = \underline{1}$ または……または $x = \underline{n-1}$」が証明可能であることから導かれる．だから，a がもしどの $\underline{m}$ の値にもならないなら，$\underline{n} < a$ でなければならない．無限大元を含んでいる PA のモデルは，**超準モデル**という名で知られている．PA には多くの異なった超準モデルがあるが，標準モデルは本質的に 1 つだけである．私たちは多くの異なる方法で（例えば，集合論を使って）自然数を定義することができるが，いずれにしろ自然数を（ある n について）$\underline{n}$ の値になるものと定める限り，どのようにして作ったモデルも**同型**，つまりまったく同じ数学的構造をもっている．

[算術]



[実数]



PA＋「PAは矛盾している」のモデルでは，「xは，PAにおける矛盾の証明のゲーデル数である」を定式化した算術的論理式によって表わされる条件を，ある要素eが満たす．しかしeは無限大元であるから，本当はゲーデル数ではない．超準モデルにおける演算$+'$や$\times'$は，無限大元に適用すれば足し算や掛け算ではないし，「xは，PAにおける証明のゲーデル数である」の算術的定義を無限大元eに適用しても，eが何かのゲーデル数であることを表してはいないのだ．

算術の超準モデルは論理学で研究されている他，**超準解析**の研究テーマを通じて，数学一般においても活躍する役割をもっている．このテーマは，1960年代に論理学者アブラハム・ロビンソンによって創出されたものである．彼は，述語論理を用いて「無限小」の理論を導入し，微積分学の創始者ニュートンとライプニッツがそこで用いた概念や論証を厳密に再構成

した．超準解析は活発な研究分野であり，数理論理学がいかに数学的実用までもたらしているかを示す顕著な例である．しかし，超準モデルを作るために，PA に偽の存在公理を加える必要があると考えてはいけない．それどころか，超準解析学で用いられる算術の超準モデルは，標準モデルとまったく同じ真の算術的言明をもつ．これが得られるのは，PA の超準モデルの存在が，不完全性とはまったく無関係だからである．真の算術（**4.3** 節を見よ）でさえ，超準モデルをもつことが，完全性定理から以下のようにして導ける．なお，真の算術 T とは，広義の意味での理論にすぎず，真の算術文のすべてを公理とするものである．いま T の公理に，次のような無限個の新しい公理を加えて得られる理論を考えてみよう．$c > 0$, $c > \underline{1}$, $c > \underline{2}$, ……ここで，c は新しい定数記号である．もしこの理論が矛盾しているなら，T と有限個の新しい公理が矛盾している．なぜなら，証明には有限個の公理しか用いられないからだ．しかし，T に新しい公理のどんな有限集合を加えたものも，c を十分に大きな自然数を示すものと解釈することによってモデルをもつので，それゆえそれは無矛盾である．したがって，T に新しい公理をすべて加えたものも無矛盾であり，それゆえ完全性定理によってモデルをもつ．それは，c によって指示される無限大元を含んでおり，超準モデルである．（論理学では，この論証は**コンパクト性定理**の応用として知られている．）

以上から，PA の標準モデルと超準モデルの違いは，初等算術の言語で定式化されうるものではないことがわかる．ある超準モデルは，初等算術の言語において，標準モデルとまったく同じ真の文をもっている．この事実は，多くの「ネット評論家」に，どのようにして標準モデルと超準モデルを見分けるかという苦悩を引き起こしてきた．しかし，すでに断ったように，これは不完全性定理と直接結びつく問題ではないので，この本では取り上げない．

8. 不完全性，複雑さ，無限大

8.1 不完全性と複雑さ

よくある通俗的説明で，不完全性定理は「十分複雑な」形式体系に適用されるものとされるが，そのような説明は誤りとは言わないまでも誤解を招く表現であることを 2.2 節で述べた．この定理が適用されない非常に複雑な体系もあるし，適用される非常に簡単な体系もあるからである．不完全性定理に対してこのような誤解を招きやすい説明をする際にはたいがい，「複雑さ」という概念がインフォーマルな感覚で使われている．しかし（本書では巻末の補遺で定義される）ロビンソン算術のような体系を見ていただければ，非常に簡単な体系でも不完全性定理を適用するために必要な「ある程度の算術」を含んでいることがわかる．逆に，計り知れない複雑さをもつ，完全で無矛盾な理論を考案するのもたやすいことだ．だから，もしインフォーマルな感覚で「複雑さ」を用いるなら，複雑性と不完全性の間には相関はないと言えよう．

他方，論理学には，技術的な意味をもった「複雑さ」がある．それは，コルモゴロフ複雑性，ソロモノフ複雑性，チャイティン複雑性（およびこれらの名前のいろいろな組み合わせ)，アルゴリズム複雑性，情報理論的複雑性，プログラムサイズ複雑性などいろいろ名で知られている．これらのうち最もよく知られている呼び方は，「コルモゴロフ複雑性」である．［Li

and Vitanyi 97］で述べられているように，これはたぶん「もてるものはさらに富む[71]」という原理の現れだろう．コルモゴロフがこれらの数学者の中で最も有名だからだ．この技術的な意味での“複雑さ”を考えても，不完全性定理の適用可能性が体系の複雑さによって定まるものではないが，しかし不完全性とコルモゴロフ複雑性は無縁ではない．とくに，この概念を独自に考案したひとりであるグレゴリー・チャイティンは，コルモゴロフ複雑性を応用して第一不完全性定理を証明する方法を，広く普及させた．

チャイティンの不完全性定理

コルモゴロフ複雑性の概念はいろいろな定式化が可能で，私たちが考察する問題に影響のない範囲でも，いろいろな変種が考えられる．それを理論的に扱う場合，複雑性のさまざまな技術的概念は，通常2進列，つまり0110101010011のようなビット列に関して適用され，そしてその技術的な定義のためにはチューリング機械が使われる．しかし，ここではそうせずに，第**3**章でインフォーマルに導入した記号列の計算可能性の理論を使うことにする．

基本的なアイデアは，単純なものだ．私たちは，文字列sの複雑さを，列s自身の長さではなく，列sを計算するための情報を含んだ最短の文字列の長さによって測る．つまり，入力が要求されたら任意の列を与えて実行し，必ずsを出力して停止するようなプログラムを記述する文字列の最短の長さが「sの（コルモゴロフ）複雑性」である．

例えば，円周率πの10進小数展開における最初の10億桁の数字列sの複雑さは，その列の長さ（10億桁）よりずっと小さい．なぜなら，πの小数展開を計算する短いプログラムがあり，そのプログラムに10億桁で停止する命令を加えるだけで，列sを作成するためのプログラムが得られる

71） おおよそ，持っている人は与えられて，いよいよ豊かになるが，持っていない人は，持っているものまでも取り上げられるであろう．『聖書マタイ伝』（第25章29節）．

からである．このような文字列は（顕著に）**圧縮可能**であるという．その列のコルモゴロフ複雑性がその列の長さと比較して小さいということである．反対に，文字列の複雑さがその長さに近いときには，（顕著な）**非圧縮性**をもつという．

ある程度大きな（例えば1000より大きな）nに対して，長さnの列のほとんどが顕著な非圧縮性をもっている．とくに，どんなnに対しても，最も圧縮しにくい列，すなわち長さnで複雑さもnの列が少なくとも1つは存在する．（これは次の単純な数え上げ論法から導かれる．(2進コードで表して）長さがnより小さいプログラムの総数は，高々$1+2+4+\cdots\cdots+2^{n-1}=2^n-1$個であるが，長さ$n$の2進列は$2^n$個存在する．）非圧縮性の列は不規則，あるいはランダムであって，規則的なパターン，つまりそれ自身より際立って短いアルゴリズムでその文字列を生成できるような部分を含んでいない．最大非圧縮性をもつ列を生成するアルゴリズムは，基本的にその列の文字を明示的に並べる以上のことができないものである．

ならば，本物のランダム列（放射性崩壊とかラバランプ[72]の流れのような物理的な過程を観察して作られる記号列）は非圧縮性をもつと思いたくなるだろう．しかしながら，特定の数列が非圧縮性であることを証明できるかどうかはまた別問題なのだ．

Tを，例によって「ある程度の算術」を含む無矛盾な形式体系であるとしよう．すると，

チャイティンの不完全性定理　Tに依存した数cが存在して，「列sの複雑さがcより大きい」という形のどんな言明もTで証明されない．

がいえる．このとき，「列sの複雑さがcより大きい」という形の言明を真にするような列sもあるから，Tが複雑さについて偽な言明を証明しな

72）容器内の粘性物質が，電燈の発する熱で対流を起こし，不規則に形を変えながら動くのを見せる装飾ランプ．ラバは溶岩の意．

い限り，そのような言明で，Tで決定不能なものが存在することになる．

この議論のエッセンスをセミフォーマルに定式化してみる．列sのコルモゴロフ複雑性を$K(s)$で表す．いくらでも大きなnが存在して，その無矛盾な理論Tは，あるsについて$K(s) > n$であることを証明すると仮定する．Tの定理全体を計算的に生成するための十分な情報を与える列をtとする．nを十分大きく選んで，nからnを表す数字の桁数を引いたものが，tの長さより数倍大きいとする．nより複雑さの大きい列sを生成するには，$K(s) > n$の形の最初の定理を見つけるまで，ただTの定理全体を検索していけばよい．けれどもこれは，（私たちが何を探しているかを告げるための）nを示す数字と，（Tを与える）情報tだけを使ってsが生産できることを意味する．これらを併せた情報の複雑さ[73]はnよりずっと小さいので，矛盾が生じる．

さらなる検討に入る前に，この結果を技術的により正確に理解したい読者のために，この定理に対するもう少しフォーマルな2番目の証明を与えておこう．

3.3節ですでに扱ったように，文字列を入力して実行し，ある文字列を出力するか，永久に停止しないようなプログラム全体の計算的枚挙を

$$P_0,\ P_1,\ P_2,\ \cdots\cdots$$

とする．どんな列sに対しても，P_iにwを入力してsを出力するようなiとwの組み合わせは無限個あるとしてよい．例えば，もしP_iが単に入力をそのまま出力するようプログラムであれば，P_iはsを入力してsを出力する．ここの説明ではコルモゴロフ複雑性を次のように定義し直す．すなわち，sを指定する最短の方法を探すのに，sを出力するプログラムとその入力を指定することによって行う．つまり，P_iがwを入力してsを出力するようなペア（i, w）の最小の長さによって，**複雑性測度**$K(s)$を定

73）nを表す数字の桁数とtの長さの和．

義する.[74]

こうして定義されたコルモゴロフ複雑性は，プログラムの枚挙の仕方に依存していることに注意したい．けれども，プログラムの計算的枚挙を任意に2つ選んで，それぞれに対応する複雑性測度を K_1 と K_2 とすれば，それらは次の意味で本質的に同等である．つまり，K_1 と K_2 には依存するが，s とは独立なある定数 c が存在して，いかなる s に対しても，$|K_1(s) - K_2(s)| < c$ となる．

これは，チャイティンの不完全性定理のような，コルモゴロフ複雑性の概念を用いて得られる種々の定性的な結論が，複雑性を定義する仕方の細部には依存しないことを意味する．(この議論は，コルモゴロフ複雑性の概念を定義する他の仕方にも拡張でき，その場合にもそれらが定める複雑性の測度は一般に s の長さの対数項の違いしかない.[75]) ともあれ，$K(s)$ の特定の定義と結びつくような定量的な結果は，ここではあまり重要ではない．

上述の「ペア (i, w) の長さ」については，若干の説明を必要とする．列 s, t が任意に与えられたとき，ペア (s, t) は，それから列 s, t の両方が読みだせるような1つの列として定義される．すなわち，1つのペアから，それを構成する2つの列が一意に決定される．ペア (s, t) の正確な定義はここで重要ではないが，ペアを表す列を定義する方法をひとつ示そう．s の長さを n とする．このとき，(s, t) は，n 個の1の後に1つの0が現れ，その後に s そして t が続くような列である．すると，例えば s が「abcdef」で，t が「ghijk」であるなら，(s, t) は

1111110abcdefghijk

である．

ペア (s, t) の中の2つの列は次のように読みだす．まず，最初の0の

74) ペア (i, w) の表記において，指数 i はそれを表す文字列と同一視されている．したがって，プログラムの指数は，プログラムを表す文字列そのものと考えてもよい．

75) $K_1(s)$ と $K_2(s)$ の差が定数 c 以内でなくても，s の長さよりずっと小さいときには (例．s の長さの対数の定数倍以内)，両者は十分長い s に対してほぼ等しいと考えてよい．

前の1の個数を数えて，次に0の直後からその個数分の文字列を s とし，残りを t とする．これを，s と t が構成するペアの**自己限定的表現**という．このとき，s の長さが n で，t の長さが m であれば，(s, t) の長さは $2n+m+1$ であることに注意せよ[76]．

コルモゴロフ複雑性の重要な特徴は，$K(s) > n$ の形の言明がゴールドバッハ類とみなせることである．なぜなら，それは以下のような言明として定式化できるからである．

> 任意の m に対して，そして長さが n 以下の任意のペア (i, w) に対して，P_i に w を入力して，m ステップで s を出力することはない．

その結果，もし無矛盾な理論で $K(s) > n$ が証明されるなら，s が n より大きい複雑さをもっていることになる．

チャイティンの不完全性定理を証明するためには，計算的枚挙可能集合全体の計算的枚挙

$$W_0,\ W_1,\ W_2,\ \ldots$$

を必要とする．それには，プログラム P_i に列 s を入力すると停止するような列 s の集合を W_i とすればよい．このとき，W_i は計算的枚挙可能である．なぜなら，

> 入力 s を与えて，n ステップ後に P_i が停止する

という形の真な言明の集合は計算的に決定可能だから，そのような形の真な言明をすべて生成し，それぞれの真な言明に対する s を出力に回すことで，W_i の計算的枚挙を得られる．逆に，すべての計算的枚挙可能集合 E に対し，ある i が存在して（実際のところ，無限個の i に対して)，E と W_i は

76） ペア (s, t) の区切りの情報を与えるには，本文のように s の長さをそのまま使わなくても，その対数の定数倍でも容易にできる．

一致する．なぜなら，もし E が計算的枚挙可能とすれば，E を計算的に枚挙するなかで，s を与えたときそれが枚挙されれば停止するような s の集合が E になるからである．

もし W_i が有限集合ならどうだろうか？　そのような場合，上で記述された手続きでは，W_i の要素をすべて生成しても停止しないで，全要素の出力後もそのまま永久に動き続けるだろう．実際これは不可避的な特徴である．計算的枚挙可能集合全体を計算的に枚挙して，どの計算的枚挙可能集合が有限かを判別すること，あるいは計算的枚挙可能な無限集合だけを選び出すことはできない．これが，計算的枚挙可能集合の定義において，有限集合の枚挙が永久に続くことを許す理由である．

チャイティンの定理を証明するために，私たちはまず次のような特別のプログラム P_e を定義する．このプログラム P_e は，数字列 p, k からなる任意のペア（p, k）を入力として与えると，「w の複雑さがペア（k,（p, k））の長さより大きい」という形の文を W_p の中で探しはじめる．そして，そのような文を W_p の中で探しだしたら，計算結果として文字列 w を出力する．

いま，理論 T が与えられたとして，W_p を T の定理の集合とおく．そして，P_e に（p, e）を入力したとき w を出力して停止したとしよう．複雑さの定義によって，w の複雑さは，高々（e,（p, e））の長さである．他方，もし T が無矛盾であるなら，w の複雑さは（e,（p, e））の長さよりも大きいので矛盾である〔～～線部はゴールドバッハ類の言明で，T の定理だから真である〕．つまり，T が無矛盾であると仮定するとき，（e,（p, e））の長さを c とおくと，どんな w に対しても「w の複雑さは c より大きい」という形の言明は T で証明されない．

ペア（e,（p, e））において，e は T から独立だが，p は T の定理の集合の指標であり，T の定理全体を明示するのには，p を指定すれば十分である．このような p の最小の長さを**理論 T の複雑さの測度** $K(T)$ と見なすことは合理的である．じつは，他の自然な定義を選択しても，それと本質

的に同じ複雑さの測度を与えることがわかる．

複雑さの定義を適度に修正し，微調整することで，不完全性定理は，次のような陳述として，定式化できる．Tから独立なある定数cが存在して，$K(T)+c$より大きな任意のnに対して，Tは$K(s)>n$の形の言明を証明しない [Chaitin 92]．

ここで，定数cも，使われた複雑性測度も特別な意味をもつものでないから，この定式化を精密に定量化しても結果を本質的に拡張するものにはならない．([van Lambalgen 89] と [Raatikainen 98] を参照)．

チャイティンの不完全性定理から導かれる一つの帰結は，圧縮不可能列の集合の補集合，すなわち，自分の長さより小さな複雑さをもつ列sの集合が，ポストの意味での**単純集合**（3.3節を見よ）になることである．まず，$K(s)$がsの長さより小さい列sの全体は，「入力wに対し，P_iのmステップの計算が，sを出力する」という形の言明を吟味すれば，計算的に枚挙できる．さらに，無限個の圧縮不可能列からなる計算的枚挙可能集合は存在しえない．というのは，それがあれば，「sの複雑さはsの長さ以上である」という形の真なる言明の無限集合W_pが得られ，それとともにいくらでも大きいnについて「sの複雑さはnより大きい」という形の言明を証明する理論が存在するからである．要するに，無矛盾な理論は，「sが圧縮不可能列である」という形の言明を有限個だけしか証明できない．

どんな無矛盾な理論Tにおいても，「文字列sが圧縮不可能である」という形の真な言明で証明不可能なものがあるということの証明をよく調べると，その証明はそのような言明の具体例を与えないことがわかる．実際無矛盾な理論Tを与えて，その理論で証明不可能なこの形の真な言明を作りだす一般的なメカニズムがあるとしたら，そのような真な言明を計算的に無限個生成することが可能になるはずだが，それはできない．いま，「sが圧縮不可能である」はゴールドバッハ類の言明であるから，この形の言明で私たちがTで決定不能とわかるものを一般に作ることもできない(77)．どんなTに対しても，私たちは，「sが長さnの圧縮不可能列である」

（sは任意）がTで証明不可能になるようなnを生成できる．しかし，この形の特定の言明がTで決定不能であることを知るためには，sが実際に長さnの圧縮不可能列であることを知る必要がある．

チャイティンによって指摘されているように（例えば，彼の論文「ゲーデルの定理と情報」[Chaitin 82]），ゲーデルのオリジナルの証明がうそつきのパラドックスと関係するのと同じように，彼の不完全性定理の証明は**ベリーのパラドックス**として知られているものと関係する．ベリーのパラドックス（オックスフォードのボドリアン図書館の司書 G.G. ベリーの名前にちなんでそう呼ばれる．『プリンキピア・マテマティカ』の脚注によって不朽のものとなった）は，百語以下の単語を使って定義できない最小の数は，百語以下の単語を使っていままさに定義されているという考察に基づく．（ベリーのパラドックスを利用した不完全性定理の別の証明が，ジョージ・ブーロス [Boolos 89] によって与えられている．）

複雑性で不完全性が解釈できるか

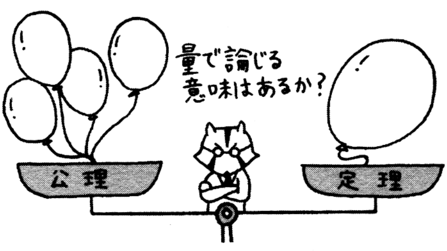
チャイティンが，彼の不完全性定理についてあちこちで発するコメントは，彼の定理が不完全性一般の根拠に光を当てるものだという印象を多くの読者に与えてきた．例えば，チャイティンは論文 [Chaitin 82] の要旨において，以下のように述べている．

> ゲーデルの定理の内容は，情報理論的な趣をもつ議論を用いて示すことができるだろう．このようなアプローチでは，定理がある与えられた公理の集合より多くの情報を含んでいるなら，その定理をそれらの公理から導くことはできないと論ずることが可能である．うそつきのパラドックスに基づく伝統的な証明に比べ，この新しい観

77） 決定不可能な言明は，証明不可能かつ反証不可能．そして，反証不可能なゴールドバッハ類の言明は真である．

> 点に立てば，ゲーデルによって発見された不完全性現象が，病的で異常なものではなく，自然で当たり前であることが見て取れる．

チャイティンが「……と論ずることが可能である」によって何を言いたいのか，またその論文の本文において述べられている「もしある人が合計10ポンドの公理の山と20ポンドのひとつの定理をもっているなら，その定理はそれらの公理からは導けないと言うことが可能であろう」という注意も，意図がはっきりしない．「より多くの情報を含んでいる」ことによって，チャイティンは「より大きいコルモゴロフ複雑性をもっている」ことを意味しており，これらのコメントにおいてチャイティンが心に描いているものが彼の不完全性定理であることは明らかだ．しかしながら，彼の不完全性定理は，理論の定理の複雑さについては何も述べておらず，複雑さについて述べた定理を扱うものである．じつのところ，「$K(s) > n$」の形の真なる言明はそれ自身nより大きい複雑さをもたなくてはならないことは，文字列sがそれから抽出されうることから，明らかに事実である．だからといって，その理論におけるその言明の証明不可能性の要因が，言明の複雑さであるとは言えない．定理がそれを導く公理よりも大きい複雑さをもちえないわけでは決してない．例えば，もし私たちが「すべての列xについて，$x = x$」を唯一の公理としてもっているなら，これは非常に複雑性の低い理論を生じる．しかしながら，この理論の定理の中にはどんな具体的な列sに対する「$s = s$」の形の言明もあるのだから，このような定理のコルモゴロフ複雑性は非有界である．ひょっとすると，ある理論の定理はその公理より複雑になりえないと「論じられる」かもしれないし，そしてある太った定理が痩せた公理からは導けないとチャイティンは



「言いたかった」のかもしれないが，それでも，そのような言明は簡単には正当化しえないものだ.

じつは，チャイティンは [Chaitin 92] でも同じことを述べ，そして定理の複雑さが公理のそれを超えられないという「ヒューリスティックな原理」の次のような「改良版」を提案している.

> 与えられた公理全体より大きい複雑さをもっている定理を，その公理の集合からは証明することは誰もできないし，そしてこれを成し遂げたかどうかを知ることもできない．すなわち，万一ある定理がそれを導く公理よりも本質的に大きな複雑さをもっていたとしても，その事実は誰も認識できない.

チャイティンはこの「改良版」の根拠を示しておらず，その理由がどのようなものかまったく明らかでない.「すべての列 x について，$x=x$」という公理から，任意の列 s に対して，$s=s$ を証明することができる．しかし，チャイティンの原理によれば，どんな列 s も「すべての列 x について，$x=x$」という文字列よりも複雑であるとは知りえないことになり，これは根拠がない主張である.

チャイティンは次の意見で締めくくっている.「このような困難と論議を避けるためには，次のようにまったく反論しえない形で私たちの基本原理を表明し直すほうがよいだろう．複雑さ N の公理集合は，どんな対象についても N より本質的に大きい複雑さをもっていると主張するような定理を導くことができない.」これは，チャイティンの不完全性定理「$K(T)+c$ より大きな任意の n に対して，T は $K(s)>n$ を証明しない」をそのような形で記述したものと考えると，以下の条件を踏まえれば，反論しえない．その条件とは，これが複雑さの測度の特定の選び方に依存していること，そして定数 c は「N よりより本質的に大きい複雑さをもっている」という記述を無意味にするほど巨大であるかもしれないことである.

いずれにしろこれは不完全性現象のひとつの事例ではあるが，先に提示したようなインフォーマルな議論に基づいてのみ理解できるものだ．

「新しい観点」を「うそつきのパラドックスに基づく伝統的な証明」と対比させることに関連して，計算可能性理論に基づく第一不完全性定理のいろいろな証明がすでに長い間開発されてきたと，チャイティン自身も述べている．とくに，MRDP 定理（3.3 節を見よ）は，不完全性定理が適用するすべての理論において，「ディオファントス方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ が解をもたない」という形の無限個の言明が未決定のまま残されることを示している．決定不能な算術的言明が必ずしも奇妙な自己言及的言明の形式化である必要はないことを強調することは本当に重要だが，この点はディオファントス方程式についての言明の決定不能性によってすでに十分例証されているのだ．

8.2 不完全性とランダム性

圧縮不可能列は，（コルモゴロフ）**ランダム列**とも呼ばれる．この意味のランダム性は程度の問題であるが，他方，記号や数の無限列に対するランダム性の概念もあり，そこではグラデーション（濃淡）はなく，ランダムかそうでないかの二択である．この性質の一般的定義は，有限列のコルモゴロフ複雑性の定義よりもいっそう技術的なので，ここでは与えない．しかし，そのような無限のビット列（すなわち，0 と 1 だけからなる数列）の中に，とくにチャイティンが定義して，世に広めた，「停止確率」もしくは Ω（オメガ）と呼ばれるものがあって，それはいろいろ興味深い性質をもっている．列 Ω は，有限ビット列のある計算的枚挙 $r_1, r_2, r_3, \cdots\cdots$ の**極限**である．つまり，Ω の n 番目のビットが i であることと，ある k が存在して，すべての $m > k$ に対して，r_m の n 番目のビットが i であることが同値になる．ここで，Ω 自身は計算可能でなく，Ω のすべてのビットをエフ

ェクティブに並べ上げることはできない.[78] 私たちは，列 $r_1, r_2,$ ……を計算することができるし，n 番目のビット位置に対し，列 $r_1, r_2,$ ……は最終的に安定して，後ろの方の列 r_k はすべて同じビットをもち，それがすなわちΩの n 番目のビットである．しかし，私たちは一般に，どの時点でその n 番目のビットに到達したのかが判定できないのだ.

チャイティンは，「Ωの n 番目のビットが i である」という形の言明について，ひとつの形式体系で正しく決定できるものは有限個しかないという，より強い主張を証明している．彼はまた，複雑さの適当な定義を用いて，ある定数 c に対して，複雑さ n の形式体系は，Ωの高々 $n+c$ ビットまでしか決定できないことも証明している.

では，不完全性に対するΩの重要性は何か？　チャイティンは，彼の本『知の限界』の序文でこう述べている.

> 要するに，ゲーデルは不完全性を発見し，チューリングは計算不可能性を発見し，そして私はランダム性を発見した．それは，数学の言明のなかに理由なく真，つまり偶然真であるものが存在するという驚くべき事実である.

チャイティンが言及している“言明”とは，「Ωの n 番目のビットが i である」という形の真なる言明のことであるように思われる.「理由なく真である」というのは，これらの言明が何らかの絶対的な意味で「推論」によっては証明不可能ということを示唆しており，実際チャイティンは他のところ（論文「純粋数学における既約な複雑さ」）でこう敷衍している.

> 要するに，このような数学的事実を証明する唯一の方法は，まったく推論を使わないで，それらを新しい数学的な公理として直接仮定

---

78)　n を与えて，Ωの n 番目のビット（0 または 1）を返す関数は，計算可能でない.

することである．

私たちはこの意見についてこれから詳しく検討していく．しかし，まずはチャイティンが，Ωの「ランダム性」を強調しながら，これらの言明を「偶然真である」とも呼んでいる事実に注目しておく必要がある．最近の本『メタマス！』で，彼は次のようにコメントしている．

> いま，まさに私たちは，既約[79]な数学的事実，つまり「理由なしに真である」数学的事実を確得しつつある．それは，公平なコイン投げの独立試行を純粋数学においてできる限り模倣するもの，すなわち停止確率Ωの2進小数展開のビット列である．

これが示唆するのは，「Ωの n 番目のビットが i である」という形の言明は，ある特定の時刻に原子が崩壊することが「理由なく真」でありうるのと同じ意味で，「理由なしに真である」ということである．私たちが，放射性崩壊は「真にランダムである」というときは，特定の時刻に原子を崩壊させるメカニズムが存在せず，放射性崩壊の統計的説明がそれについて知りうるすべてであるという意味だ．しかし，もちろんΩは物理実験によって定まるものではないし，「数学的なメカニズム」あるいは「数学の法則」といった概念があって，数学的言明のいくつかはそれによって真になり，それ以外はたまたま真になるということではない．もし証明や推論についてではなく，言明を真にするものについて話しているとすれば，私たちが言えることは，もしもゴールドバッハの予想が真であれば，それは2より大きい偶数がすべて2つの素数の和であるという理由で真であり，もしも「Ωの n 番目のビットが i である」という言明が真であれば，有限ビット列の数学的に定義された列 r_1，r_2，r_3，……の n 番目のビットの極

79）それ以上還元できないこと．続く本文の中に説明がある．

限がiであるという理由で真である，等々にすぎない．Ωが「ランダム列」と呼ばれるものであるという単純な事実が，Ωのビットの並びが自然界に存在するかもしれないランダム性に類似しているという意味でランダムであると主張することに，何か必然的な理由を与えるものではない．

じつは，チャイティン自身，Ωは数学的に定義された列であることを強調し，それを説明するためには「ランダム」より他の用語を使うことが望ましいだろうと言っている．彼は「既約（irreducible）」という言葉を提案する．

> 言い換えると，Ωのビット並びは論理的に既約，つまりそれらよりも単純な公理から導けないものだ．ついに，私たちは，公平なコイン投げの独立試行を模倣する方法をみつけたのだ．「原子的」な数学的事実，互いに関係をもたず，いわば「理由なく真である」（それらよりも単純な理由はない）ような数学的事実の無限列を発見したのである．

結局同じ考えに戻ることになる．これらの言明は，仮定することができるだけで，それ以上興味をもてる意味では証明されないということである．そしてこのことは，上の文章を引用すれば，「より単純な公理からは得られない」ということに由来しているらしい．

これについて，もう少し検討を加えていこう．「より単純である」という概念が何か与えられて，文字列の“単純さ”の度合いが自然数によって測られているなら，より単純な真なる文から論理的に導出できない真なる算術的言明があることは，自明な事実である．例えば，「0＝0」を論理的に含意する真なる言明のなかで最も単純な言明は，それよりさらに単純な真なる言明からは論理的に導出できない．実際には，単純さに対する多くの自然な尺度について，「0＝0」自身が最も単純な言明としてのこの性質をもっているであろう．だから，チャイティンが語る「驚くべき事実」は，

より単純な真なる文から導出できない真なる言明があるという事実だけではありえない．

「0＝0」と「Ωの n 番目のビットが i である」という形の言明の間にはもちろん大きな違いがある．とくに，後者のような言明は，自明でも明らかに真でもなく，むしろ数学上の問題を提起し，証明を求める．そして，それらが「より単純な公理から得られない」と主張する根拠も，自明でも明らかに真でもない．複雑さ n の形式体系は，Ωの高々 $n+c$ ビットしか決定できないという結果は，例えば，“もし「Ωの第1000番目のビットが0である」ということが真であるとしてもその言明はそれを公理として仮定することによってのみ証明できる”ことを示してはいない．Ωのビットに関するどの言明が，与えられた体系で証明できるかは，その体系に依存し，またΩの定義の詳細に依存する．とくに，どんな n に対しても，Ωの定義のパラメータを適当に選べば，$k<n$ について「Ωの k 番目のビットが i である」という形の真なる言明をすべて証明することが可能である．実際，それらのパラメータを自然に選んで，カルードら［Calude *et al.* 01］は，Ωの最初の64ビットを計算している．

私たちは代わりに，「Ωの最初の n ビットが s によって与えられる」という形の言明について考えてみよう．ここで，s は長さ n のビット列である．Ωがランダムであれば，適当な複雑さの定義を用いて，Ωの最初の n ビットからなる列 $\Omega_{1:n}$ の複雑さがつねに $n-c$ より小さくならないように，n と独立な定数 c をとることができる．すると，十分大きい n に対して，$\Omega_{1:n}$ は（私たちが望む度合いの）非圧縮性をもち，そして「Ωの最初の n ビットが s によって与えられる」という形の真なる言明は，n より（本質的に）短い文字列を入力に用いたアルゴリズムによっては生成できない．しかし，単純な入力からアルゴリズムで作りだせないような，巨大な複雑さをもつ言明も，一般に非常に単純な公理から証明しうることを私たちは知っている．このような特別な形の言明で十分に長いものが，同じ複雑さ，つまり（これらの言明は非圧縮性なので）同じ長さをもつ公理を使ってのみ

証明しうることを示すには，特殊な議論が要求されるだろう．

たとえこれを事実と示すことができたとしても，公理 A を使って推論によって言明 B の真理を確立できるとき，公理 A が言明 B より必ず短くなくてはならないという考えを支持する明確な根拠はない．（この考えは，チャイティンの別の「ヒューリスティックな原理」と相反するもので，後者は逆に，定理の複雑さはそれを導くための公理の複雑さを超えることはできないというものである．）チャイティンはこの考えに対する議論を与えておらず，それは私たちの経験と一致するものでもない．

いま，

$$10000^{10000} < p < 2 \times 10000^{10000} \text{ となる素数 } p \text{ が存在する}$$

という言明を考えてみよう．人間の推理は，この言明を証明するのに決して無力ではない．実際，チェビシェフの定理に対するエルデシュのとてもエレガントな証明から，n と $2n$ の間につねに素数が存在することが導かれる．しかし，その証明にはさまざまな算術的公理を使う必要があり，そのいくつかは自然な尺度で，証明したい定理よりももっと大きな長さと複雑性をもつことになる．「Ω の最初の n ビットが s によって与えられる」という形の言明が（十分大きい n に対して）ただ仮定して示せるだけで，推論によって証明できないという考えを支持する根拠を探すなら，$\Omega_{1:n}$ の非圧縮性でなく，このような言明に対する他の見方の中に求めなくてはならない．

もちろん，例えば ZFC において形式化可能な推論が，十分大きな n に対してこのような言明を証明できないことを私たちは知っている．（実際，ロバート・ソロベイが示したように，チャイティンの Ω の定義を適当に微調整することによって，「十分に大きな n」を「任意の $n>0$」というようにできる．）しかし，「推論」のようなものがこれらの言明を確立するのに無力であると結論するには，（任意の長さの言明を含む）推論一般の分析や理論が必要であり，チャイティンの書き物にはそれがまったく欠けている．

Ωのビットについての言明や「$K(s) > n$」の形の言明が，どんな理屈であれつねに「何かの理由で真である」などと主張するための根拠を私たちがもっているわけではない．また，私たちは，何らかの絶対的な意味で，何が証明できるか否か，説明できるか否か，理由を与えられるか否かについて論ずる理論的な根拠をもっていないのである．「ある数学的言明は理由なしに真であるという驚くべき事実」を発見したというチャイティンの主張は明白な内容をもっておらず，どちらかと言えば「ランダム」という語を取り巻く一般的な連想に基づいているように思われる．しかしそのような主張はさておいても，コルモゴロフ複雑性の理論を使って見いだされる算術の不完全性の例は，それ自体十分興味深いものである．

8.3 不完全性と無限大

さまざまな不完全性

多くの不完全な形式体系は意図的に不完全に作られている．それらの体系の目的は，ある特定のクラスの数学的構造が共有する特徴を記述するもので，それ以外の性質はいろいろだからである．典型的な例は，群の初等理論である．この理論は「群」と呼ばれるものを定義しており，逆に群はその理論の公理をすべて真にする数学的構造である．その理論は不完全である．なぜなら，例えば，ある群は可換性をもち，別の群はもたない．また，すべての群が，同じ個数の要素をもつわけではない．通常，数学的構造のクラスを特徴づけるために導入される理論は，ゲーデルの定理が適用されるための条件を満たしていないが，それでもそれらの不完全性は定義からほぼ明らかである．

このように数学的構造のクラスを定義するために使われる理論ではなく，私たちの数学的知識の一部を形式化するような理論で，なおかつ不完全性定理が適用できる理論に考察を制限したとしても，論理学で証明される不

完全性にはさまざまな結果があって，それらには決定的な違いがある．ここではまず，今日行われている数学の大部分がその中で形式化できる理論として，ツェルメロ＝フレンケル集合論に選択公理を加えた理論 ZFC について考察しよう．ZFC はいくつもの観点から不完全である．（以下の説明では，ZFC の算術的健全性，すなわち ZFC のすべての算術的定理が真であることは，自明のこととする．）

第一に，不完全性定理が ZFC に適用されるから，ZFC の算術部分は不完全である．とくに，ZFC はそれ自身の無矛盾性を証明しない．MRDP 定理から，私たちは「ディオファントス方程式 $D(x_1, \ldots, x_n) = 0$ が解をもたない」という形の ZFC で決定不能な言明があることを知っている．しかし，（ZFC の算術的健全性のもとで）ZFC で決定不能であるとわかっている算術的言明の中には，数学者たちが提起した未解決問題，つまり素数についての問題や一般的な数学上の興味を引く事柄はまったく含まれていない．例えば，双子素数予想が ZFC で決定不能になることも論理的に排除できないけれど，それが事実であると信じる理由はまったくなく，双子素数予想が ZFC で決定不能であるという証明が見つかれば，火星に先進的な地下文明が発見されるのに匹敵するくらいのセンセーションを数学の世界に巻き起こすだろう．

第二に，ZFC の公理からは，たくさんの無限集合の存在が証明されるが，これらの無限集合に関する決定不能な言明が多数ある．そのうち最も有名なのはカントールの連続体仮説（CH）であり，その主張は，実数全体の集合のどの無限部分集合も，実数全体と同じ濃度をもつか，あるいは可算無限であるというものである．（読者は，これが意味する内容に深く立ち入る必要はない．）連続体仮説は，ゲーデルとポール・コーエンの仕事によって，ZFC で決定不能であることが知られている．コーエンは，先行するゲーデルの集合論の仕事をもとにして強制法と呼ばれる方法を編みだし，無限集合についての言明が ZFC で証明不可能であることを証明するのに際立った成功をおさめた（ただし，この方法は，ゲーデルの不完全性定理とは何の

関係もない）．CH は，この方法を用いて，ZFC で決定不能であることが示される典型例である．このとき，CH や not-CH が ZFC において証明可能でない算術的言明を新たに含意しないことも示すことができる．（なお，CH が ZFC で決定不能であることを証明するには，ZFC の無矛盾性だけは仮定する必要がある．）

ゲーデルは，集合論における彼の基礎的仕事，とりわけ CH と ZFC の諸公理との無矛盾性を確立する仕事において，「構成可能性公理」と呼ばれ，通常「V＝L」と書かれる集合論の原理を導入した．V＝L は，第二類の集合[80]に関して知られていた未解決な言明を，事実上すべて決定した．（ただし，ZFC で証明できない算術的言明はそれからも帰結されないことが知られている．）さらに，ゲーデルは，V＝L が ZFC の諸公理と無矛盾であることを証明した．（それで，第二類の決定不能言明について，それらが ZFC で反証できないことを示す常套手段は，それらが V＝L から導けることを示すことになった．）にもかかわらず，なぜ V＝L が集合論の標準的な公理に取り入れられなかったかについて知りたい読者はシェラハの論文「論理学の夢」[Shelah 03] をご覧になるとよい．そこには，本書のこの最終部で触れているいくつかの問題に対して，もっと専門的で厳密な解説が与えられている．

ZFC の公理が不完全であることの 3 番目の観点は，どこまで「大きな」無限が存在するのかをうまく決定できないという事実の中に見いだせる．**無限大の諸公理**として知られている言明の集まりについては，1960 年代から集中的に集合論で研究されてきた．これらの言明は，もし存在したら「非常に大きい」に違いない集合がまさに存在することを主張する．無限大の諸公理に関しては，ZFC の無矛盾性から，無限大の公理 A が ZFC で証明できないこと，つまり ZFC＋not-A が無矛盾であることが含意されるだけである．理論 ZFC＋A の無矛盾性は，ZFC の公理が真であると仮定しても，いろいろ問題を含んでいるだろう．ここで無限大の公理には 2

80） その閉包が内点を含まない集合を**疎**であるといい，疎集合の可算和で表せるものを**第一類**の集合，そうでないものを**第二類**の集合という．

つのタイプがあって，両者には大きな相違がある．ひとつは，集合の宇宙がある種の閉包性をもち，それゆえに非常に大きな集合を含むというものであり，もうひとつは，最小の無限集合，つまり自然数全体の集合から性質を抜きだし，それに相当する性質をもったもっと大きな無限集合が存在することを主張するものだ．

前者のタイプの無限大の公理（「無限大の弱い公理」）のほうが多くの人に対して説得力があり，インフォーマルな考察によっても正当化しうるだろうが，後者のタイプの無限大の公理（「無限大の強い公理」）はZFCの公理と無矛盾であることさえも明らかだと主張する人はほとんどいないだろう．強い無限大の公理はたいがいV＝Lとは矛盾していて，そして最初のタイプの公理よりも論理的に強いのだが，それでもなお連続体仮説を決定するような無限大の公理はまだ知られていないのである．

ZFCの不完全性の3番目の観点と，それが引き起こした無限大の諸公理の研究は，極度に難解で専門的な数学の分野に見えるし，実際にその通りであろう．しかし，その無限大公理が同時に，自然数を扱う具体的な数学にも繋がってくるのだ．

ゲーデル的関係

というのは，非常に大きい無限集合の存在に関してのZFCの不完全性と，ゲーデルの不完全性定理によって明らかにされた算術的不完全性の間に注目に値する関係があるからだ．無限大の公理によって拡張された理論は，拡張される以前の理論では証明できない算術的帰結をつねにもつ．つまり，無限大の公理が強くなればなるほど，いっそう多くの新しい算術的定理を含意する．

この関係は，不完全性定理をベースにして理解できる．最も弱い無限大の公理は，じつはZFCの一部である．それは“無限集合が存在すること”を主張する．この公理を使うことで，それ以外のZFCの公理を真とする

ようなモデル[81]が存在することをZFCにおいて証明できる．つまり，ZFCからその無限大の公理を消去した理論 $\mathrm{ZFC}^{-\omega}$ の無矛盾性を証明できる．$\mathrm{ZFC}^{-\omega}$ も不完全性定理の適用を受け（その算術の部分は，PAと同等である），それゆえそれ自身の無矛盾性を証明しない．つまり，「無限集合が存在する」という公理を導入すると，新しい算術的定理として，とくに $\mathrm{ZFC}^{-\omega}$ の無矛盾性，したがってまたPAの無矛盾性が生みだされることがわかる．（実際ZFCは $\mathrm{ZFC}^{-\omega}$ よりも算術的にずっと強いから，こんな基本的な例はかえって話をわかりにくくしているかもしれない．）

より強い無限大の公理の場合は同じように簡単には定式化されないが，しかし無限大と算術の間の基本的な関係は同じゲーデルの原理から従う．例えば，第二の無限大の公理は，強到達不能基数[82]として知られるものの存在を主張し，とくにZFCのすべての算術の定理が真であることを含意する．強到達不能基数の存在を主張する公理は，上で説明した意味で「弱い」無限大の公理である．「強い」無限大の公理は，それからの帰結を見ても明白からはほど遠いものだが，研究によってわかってきたことは，より強い公理によるZFCの拡張は，より弱い公理によるZFCの拡張についての算術的健全性を含意することである．

哲学的な見地からたいへん重要な点は，非常に大きい無限集合の存在を主張する公理によって集合論を拡張することが，拡張される前の理論で証明できない論理的帰結を算術領域にもつことである．しかしながらこの場合も，無限大の公理によるZFCの拡張によって新たに算術の定理となるものの中で，伝統的な数学の関心となるような算術の問題は，知られている限りではひとつもない．そのため，ZFCで決定可能ではないが，無限大の公理を使うことで証明可能になるような興味ある算術的言明を，論理学の特種な領域の外で見いだすことが強く望まれてきた．

81） モデルについては第7.1節，とくに「論理規則の健全性と完全性」の項を参照．

82） ω より大きな基数 κ で，次の2条件を満たすものを強到達不能基数と呼ぶ．(i) κ より小さい濃度の集合を κ より小さい個数集めて，和をとっても濃度は κ より小さく，(ii) κ より小さい濃度の集合のベキ集合の濃度も κ より小さい．

パリス＝ハーリントンの定理

この方向の第一歩となったのは，ある種の組み合わせ原理がPAで決定不能であることが証明された1977年の仕事である．この結果のとても重要な点は，その組み合わせ原理がゲーデル数や形式理論に言及しておらず，よく知られたある数学的原理の表面上些細な強化版であるという事実にある．本章の最後にこのような取り組みのさらに遠大な拡張について述べるが，まずは基本的な理解を得るために，この結果について少し詳しく見てみよう．

ラムゼイの定理は，1928年にフランク・プランプトン・ラムゼイによって証明された，有限数学における基本的な結果である．この定理を定式化するために，私たちはいくつかの定義を必要とする．数（あるいは実際何でもよいが）の有限集合 A が与えられたとしよう．A の n **要素部分集合**は，n 個の要素からなる集合 B で，そのすべて要素が A から取られているものである．A の n 要素部分集合全体の m **分割**は，これらの部分集合を m 個のカテゴリー $C_1, \ldots, C_m$ に分け，各 n 要素部分集合はどれかひとつだけのカテゴリーに属するようにしたものである．最後に，A の部分集合 H が，与えられた分割に対して**等質**であるというのは，その分割のあるカテゴリー C_i が存在して，H の要素だけからなる A の n 要素部分集合が，すべて C_i に属するときをいう．

具体的な例を示そう．A をある市の住民全体として，A の5人部分集合全体を次の2つのカテゴリーに分割する．一緒にうまくやれる5人のグループと，そうでないグループ．A の等質部分集合は，次のような集合 H である．H からどのように5人を選んでもみんなうまくやれるか，あるいは H からどのように5人を選んでも決してうまくやれない．

ラムゼイの定理は，等質部分集合の存在に関するものである．定理（正確には「有限ラムゼイ定理」）は，任意の n, m, k に対して，数 p が存在して，

A が p 個以上の要素を含んでいるなら，A の n 要素部分集合全体の m 分割をどのように定めても，k 個以上の要素を含む A の等質部分集合が存在するというものである．上の例では（$k=1000$ とすると），もし十分大きな人口 p を指定すれば，少なくともそのサイズ（p）以上の市については，1000 人の市民の集合があって，その中のどの 5 人もうまくやっていけるか，どのように 5 人を選んでもみんなでうまくやれないことになる．

有限ラムゼイ定理は有限集合についての定理であるが，数の有限集合を数で表せば，算術の言明として定式化できる．そして，それは PA で証明可能である．一方、**パリス＝ハーリントンの定理**は，有限ラムゼイ定理の結論をわずかに修正した命題に関するものである．数の集合 A が**比較的大きい**ということを，A の要素の個数が A の最も小さい要素よりも大きいこととする．ラムゼイの定理は，その等質集合 H が比較的大きいという条件を加えても，やはり成り立つことが証明できる．けれども，パリス＝ハーリントンの定理は，この命題が PA で証明可能でないことを示した．

パリス＝ハーリントンの定理はいろいろな方法で証明することができるけれど，それが示した PA の不完全性は，次の意味でゲーデル的不完全性の一例と言える．すなわち，強化されたラムゼイ定理は，じつは「PA は Σ 健全である」ということと PA において同値である．つまり，これは，PA の健全性を証明することによって補完される PA の不完全性の事例であり，ある種の無限大の公理を仮定して証明することができる．

その後の発展

パリス＝ハーリントンの定理からは，有限数学の同様な組み合わせ原理で，ZFC では証明不可能で，無限大の公理を使ってなら証明できるようなものが見つけられるだろうことが示唆される．ハーヴィ・フリードマンは，この方向で多くの仕事を成し，種々の組み合わせ原理が，さまざまな無限大の公理による ZFC の拡張に対する無矛盾性や Σ 健全性と同値にな

ることを示している．これらの結果は，次の点でパリス＝ハーリントンの定理と類似している．それは，PA で証明可能な組み合わせ原理の表面上の小さい修正が，強い理論の無矛盾性を導く結果を原理的にもたらすということである．

フリードマンの諸定理において定式化されている組み合わせ原理はいくぶん難解であり，そしてそれらがどの程度まで「普通の数学」で用いられるようになるかは未知の課題である．また，これらの原理が「強い」無限大の公理の無矛盾性を含意するとしても，だからといってこの組み合わせ原理を私たちが受け入れなければならない明らかな理由とはならない．しかし，有限数学の領域における無限大の公理の帰結はたいへんに豊かで新しい見方への手がかりに溢れているので，無限集合の存在を主張する言明としてみると明らかでないような無限大の公理をも，受け入れるべきではないかという考えをゲーデルは，表明している．フリードマンの仕事は明らかにこの考えにとって重要であり，それが最終的にもたらす数学的成果がどのようなものになるかはこれからのことである．数学の新しい公理に関する問題については，わかりやすい解説が［Feferman *et al.*, 00］にあるので参照してほしい．

A. 補遺

A.1 初等算術の言語

この補遺にはおもに2つの目的がある．一つは算術的言明がゴールドバッハ類であることについての正式な定義を与えること，もう一つは第一不完全性定理のゲーデルのオリジナルな主張に対するロッサーの強化版の特徴について述べることである．不完全性定理の証明の詳細を知りたい読者は，巻末の文献［Smullyan 92］を参照されるのがよいだろう．この本は，論理学の予備知識を仮定せずに，豊富な情報を与えてくれる．

初等算術の言語は **7.2** 節で定義した．若干用語を付け加えながら，要点を復習しよう．まずは，項の概念からはじめる．項は，変数 $x, y, z, \ldots$ と数項 0，掛け算記号 $\times$ と足し算記号 $+$，そして数 n を $n+1$ に移す後者関数の記号から構成される．そして，この言語において，自然数 $0, 1, 2, 3, \ldots$ は，（形式的）数項 $0, s(0), s(s(0)), s(s(s(0))), \ldots$ によって表される．値 n をもつ数項を $\underline{n}$ と書く．変数の使い方はふだん数学で行っているのと同じで，それらを使って，例えば $x+s(0)$, $(x+y)\times z$ などのような項が形成される．項は，その中の変数に値が割り当てられれば，直ちに自然数の値をもつ．例えば，x に値 8，y に値 0，そして z に値 2 が割り当てられるなら，$(x+s(y))\times z$ は値 18 をもつ．**論理式**は，項 s, t に関する**等式** $s=t$ から，論理演算（**結合子**とも呼ぶ）と量化子を用いてつくられる．論理演算には，“否定”“または”“ならば”“同値である”がある．量化子には，**全称量化子**“すべての自然数 x について”と，**存在量化子**“少なくとも1つの自然数 x について”がある．

すると，この言語で次のようなことが述べられる．

> すべての自然数 x について，少なくとも 1 つの自然数 y が存在して，ある z に対して $y=x+s(z)$，そしてある w に対して $y=s(s(w))$ で，すべての自然数 u, v について，$y=u\times v$ ならば，$u=s(0)$ かつ $v=y$，あるいは $u=y$ かつ $v=s(0)$.

これは，このあとでわかるように，無限個の素数が存在することを表す方法のひとつである．私たちは，演算や関係を定義によって導入し，初等算術の言語を自由に拡張することができる．例えば，「ある z が存在して，$y=x+s(z)$」と書く代わりに，$x<y$ と書き，「ある w に対して $y=s(s(w))$ で，すべての自然数 u, v について，$y=u\times v$ ならば，$u=s(0)$ かつ $v=y$，あるいは $u=y$ かつ $v=s(0)$」と書く代わりに，「y は素数である」と書くと，上の言明は以下のようにずっと簡明になる．

> すべての自然数 x に対して，少なくとも 1 つの自然数 y が存在して，$x<y$ そして y は素数である．

論理式について話すときは，変数の**自由な**出現と**束縛された**出現の区別が繰り返し問題になる．変数の束縛された出現というのは，量化子と結びついた変数の出現のことである．例えば，「ある w に対して $y=s(s(w))$ で，すべての自然数 u, v について，$y=u\times v$ ならば，$u=s(0)$ かつ $v=y$，あるいは $u=y$ かつ $v=s(0)$」において，変数 w, u, v の出現はすべて束縛されている．これらの変数は，この論理式の中においては，「すべての数について」と「ある数が存在して」という論理的な概念を表現する手段として用いられるにすぎない．他方，この論理式において，変数 y の出現は自由である．つまり，この論理式全体は，y に関する条件（この場合は y が素数であること）を表現しているのである．

論理式 A が自由変数 x をもつ場合，それをしばしば $A(x)$ と表し，その x を t で置き換えて得られる論理式を $A(t)$ と書く．形式言語における**文**とは，自由変数をもたない論理式のことである．だから，文は，それが真か偽かを語ることが意味をもつような言明を表している．他方，自由変数 $x, y, \ldots$ をもつ論理式は，$x, y, \ldots$ に関する条件を表していて，ある数の組みに対してはそれが成り立ち，別のものに対しては成り立たないこと

になる．いま，y が素数であることを表現する上の論理式を $prime(y)$ とすれば，$prime(\underline{17})$ は 17 が素数であることを表す真な文であり，$prime(\underline{15})$ は 15 が素数であることを表す偽な文である．

ゲーデルによって最初に発見された驚くべき事実は，足し算と掛け算だけを使って，指数関数をはじめ自然数上の通常の演算はすべてこの言語で**定義**できることである．指数関数が定義可能であるというのは，以下のような論理式 $exp(x, y, z)$ が存在することである：任意の自然数 m, n, k に対して，変数 x, y, z にそれらを表す数項を代入した文 $exp(\underline{m}, \underline{n}, \underline{k})$ が真であることと，$k = m^n$ であることは同値である．さらに，この定義のもとで，指数関数の基本法則：任意の自然数 x, y に対して，$x^0 = 1$, $x^{y+1} = x^y \times x$ が，PA において証明される．この法則と帰納法によって，指数関数に関する他の法則も導かれる．こういうわけで，初等算術の問題について，哲学や論理学の文脈で論じる場合は，足し算と掛け算だけをもつ PA の公理に話を制限できるのである．

いくつかの記号法

論理学における標準的な記号法を導入しておく．$\forall x$ は「すべての x に対して」，$\exists x$ は「ある x が存在して」，$\neg A$ は「A でない」，$A \vee B$ は「A または B」，$A \wedge B$ は「A かつ B」，$A \supset B$ は「A ならば B」，$A \equiv B$ は「A と B は同値」を表す．〔「$A \supset B$」を「$A \rightarrow B$」と書く本も多い．〕

これらの記号を用いれば，「$x < y$」を定義する論理式は $\exists z(y = x + s(z))$ となり，上で与えた「y は素数である」の定義はもっと明快に $\exists w(y = s(s(w))) \wedge \forall u \forall v(y = u \times v \supset (u = \underline{1} \wedge v = y) \vee (u = y \wedge v = \underline{1}))$ となり，そして「素数が無限に存在する」の定式化は $\forall x \exists y(x < y \wedge y$ は素数である$)$ となる．

A.2　第一不完全性定理

ここで私たちは，第一不完全性定理を形式体系に適用するための条件である「ある程度の算術」を正式に定めたい．以下では，扱う形式体系の推論規則は明示せずに，その代わりに算術の言語に関して私たちが用いるどんなインフォーマルな推論もこの体系で行えると仮定しておこう．このよ

うなインフォーマルな推論は，じつは1階論理の推論規則を用いて形式化できるようなものである．つまり，1階論理の完全性定理（第7章参照）によれば，体系がこれらの規則を全部含んでいれば，どんなインフォーマルな推論でも行えるというのは妥当な仮定である．私たちはまた，体系の定理の集合が計算的枚挙可能であるという基本条件も仮定する．（**3.4** 節を見よ.）

そのような理論の言語は初等算術の言語を含み，そしてその公理はPAの最初の6つの公理を含んでいるとする．

1. $\forall x \neg s(x) = 0$
2. $\forall x \forall y (s(x) = s(y) \supset x = y)$
3. $\forall x (x + 0 = x)$
4. $\forall x \forall y (x + s(y) = s(x + y))$
5. $\forall x (x \times 0 = 0)$
6. $\forall x \forall y (x \times s(y) = x \times y + x)$

ここで，「ディオファントス方程式 $D(x_1, . . . , x_n) = 0$ が（自然数の範囲で）少なくとも1つの解をもっている」という形の言明を考えてみよう．私たちはこの言明がPAの言語で表現されていると仮定する．例えば，方程式「$x \times x - y \times y = 1$」は「$x \times x = y \times y + 1$」と書かれる．公理 (3), (4), (5), (6) だけあれば，この形の真な言明を証明するのに十分である．というのは，もし等式 $t(x_1, . . . , x_n) = t'(x_1, . . . , x_n)$ が解 $\underline{k_1}, . . . , \underline{k_n}$ をもつとき，ある m が存在して，公理 (3)－(6) によって，$t(\underline{k_1}, . . . , \underline{k_n}) = \underline{m}$ かつ $t'(\underline{k_1}, . . . , \underline{k_n}) = \underline{m}$ が証明され，それから簡単な論理的推論により，その等式が解をもつという結論が導かれる．**3.4** 節で示したように，もし T が無矛盾であれば，MRDP定理から「ディオファントス方程式 $D(x_1, . . . , x_n) = 0$ が解をもたない」という形の真なる言明で，T で証明可能でないものがある．さらにもし「ディオファントス方程式 $D(x_1, . . . , x_n) = 0$ が解をもつ」という形の偽なる言明が T で証明されることがないなら，そのような言明で T で決定不能なものが存在することになる．

この結果に関する説明を続ける前に述べておきたいことは，T の言語は算術の言語をそのまま含んでいる必要はなく，また T の公理は (1)－(6)

をそのまま含む必要はないことである．$s, \times, +$ がその言語で定義されて，ある論理式 $N(x)$ を満たす対象に関して (1)－(6) が証明されていれば十分である．例えば，集合論では，「要素である」という述語のみを使った純粋に集合論的論理式 $N(x)$ によって，「x が自然数である」ことを定義することができる．そして同様に，「自然数 x は自然の数 y と z の和である」や，「自然数 x は自然数 y の直後の数である」や，「自然数 x は自然の数 y と z の積である」ということを定義し，そしてこれら（および 0 の定義）を使って (1)－(6) が証明されるのである．不完全性を導く推論は，自明な修正を加えるだけでそのままうまくいく．

上の議論では，公理 (1) と (2) が使われなかったことをここで指摘したい．それらの公理は，ゲーデルにならって不完全性定理を定式化するために必要となる．「$\underline{m} = \underline{n}$」が偽であるとき，それを反証するのは，公理 (1) と (2) だけでできる．したがって，(3)－(6) を一緒に用いれば，「$D(\underline{k}_1, \ldots, \underline{k}_n) = 0$」の形の偽なる言明をすべて反証することができる．こうして，これらの公理のもと，ゲーデルの ω 無矛盾性の概念を使って，不完全性定理を定式化することができる．

つまり，どんな算術的論理式 $A(x_1, \ldots, x_n)$ についても，「ある $x_1, \ldots, x_n$ が存在して，$A(x_1, \ldots, x_n)$」が T で証明され，同時にすべての代入例 $A(k_1, \ldots, k_n)$ が T で反証されることがないならば，そのときに T は不完全である．（実際に私たちに必要なのは，上の論理式 $A(x_1, \ldots, x_n)$ を「$D(x_1, \ldots, x_n) = 0$」の形に制限したものだけだから，ω 無矛盾性より弱い Σ 健全性で十分である．後者については，以下で正式に定義する．）

ロッサーによる不完全性定理の強化版は，若干の基本算術を含むどんな無矛盾な理論も不完全であるというものである．ω 無矛盾性や Σ 健全性の前提を無矛盾性の前提に置き換えることは，不完全性定理の非常にマイナーな強化と思われるかもしれない．実際，もしも PA と ZFC のように私たちの数学的な知識の一部を形式化した理論について考えるなら，Σ 健全性が無矛盾性以上に疑わしいわけではない．だから，不完全性定理の強化版は，これらの理論については何も新しい情報を与えない．理論上は，PA や ZFC のような理論の無矛盾性を確信しつつ，その Σ 健全性を疑うことも可能であるが，実際そのような懐疑論者がいるとは思えない．

しかしながら，ロッサーによる不完全性定理の強化版は，重要な応用を

もつ．とくに，この本でもよく扱っているような一般的な理論に不完全性定理を応用する際に，オリジナル版の弱みを補強するものになる．不完全性定理をある理論 T に適用する際には，私たちは「T の算術部分」を分離することになる．つまり，その中で「x が自然数である」，「$x \times y$」などを定義して，自然数に関して (1)－(6) が証明できるようにする．しかし，私たちが T の算術部分と見なしたものは，別の方法で解釈したほうがいいこともあるし，また T の公理を提案する人もそのように解釈しているかもしれない．したがって，自然数の言明として偽であるような「ディオファントス方程式 $D(x_1, \ldots, x_n)=0$ が解をもつ」の形の言明が T で証明されたとしても，T に欠陥があるとは限らない．例えば，(1)－(6) に加えて $\exists x(s(0)+x=x)$ も証明する理論 T があるとしよう．算術の言明とみれば，方程式 $1+x=x$ は自然数の解をもたないので，これは明らかに偽である．けれども，私たちが T の算術部分と決めたものは，別の解釈を合理的に与えられるかもしれない．例えば，理論 T の提案者は，変数の変域を自然数ではなく，自然数の集合論的一般化である可算順序数と解釈するかもしれない．この解釈では，(1)－(6) はそのまま真であるが，方程式 $s(0)+x=x$ も無限個の解を無限順序数にもつ．そこで，不完全性定理を理論 T に適用する際，ロッサーの強化版を用いるなら，次のことがいえる．「ある程度の算術」が行える T の部分をその「算術部分」と見なすことが（他に証明されるものにもよるが）おおよそ合理的といえるくらいでも，その理論が矛盾していない限り（T をいかに解釈しようとも矛盾は悪性である），その部分の言明に関して不完全である．

理論 T のロッサー文を用いたロッサーの証明については，**2.7** 節で簡単に述べた．この証明にはいくもの変種や一般化があるが，MRDP 定理を直接適用して，不完全性定理のゲーデル版をもたらすようなものはない．ゲーデル＝ロッサーの定理は，公理 (1)－(6) を少し強めたロビンソン算術（R.M. ロビンソンの名にちなむ）として知られるものを包含する理論に対して通常証明される．この理論の１つの表現は，初等算術の言語を拡張し，最初から言語に不等号 $<$ を加えて，それを通常のように「より小さい」という関係を意味するように解釈する．私たちは公理 (1)－(6) に３つの公理を加えるが，そのうち最初の２つは，公理 (1)－(6) が足し算，掛け算，後者関数を定めているのと同じやり方で関係 $<$ を定めている．

7. $\forall x \neg (x < 0)$
8. $\forall x \forall y (x < s(y) \equiv x < y \vee x = y)$
9. $\forall x \forall y (x < y \vee y < x \vee x = y)$

興味ある読者のために，公理（1）−（9）を含むどんな無矛盾な理論も不完全であること（ロッサーの議論の一般化）の証明に関する詳しくて読みやすい解説としてスマリヤンの本をあげておく．次に私たちは，ゴールドバッハ類の言明の概念を正式に定義するため，計算可能性理論の見地からロビンソン算術について考察する．

A.3 ゴールドバッハ類の言明，Σ論理式，計算的枚挙可能関係

$<$ を使って，私たちは有界量化だけを含む特殊な論理式のクラスを定義することができる．それを私たちは**有界論理式**と呼ぶ．そのような論理式では，すべての全称量化は $\forall x (x < t \supset A)$ の形で，すべての存在量化は $\exists x (x < t \wedge A)$ の形で現れる（どちらの場合も t は x を含まない項とする）．私たちはこの形の論理式を $\forall x < tA(x)$ や $\exists x < tA(x)$ と略記する．

有界論理式の基本性質は，すべての量化記号が有界であるような文に対して真偽の判定をする**アルゴリズム**が存在することである．文 $\forall x < tA(x)$ が真であるかどうか調べるためには，t の値 n を計算して，n より小さいすべての k について，$A(\underline{k})$ が真であるかどうかをチェックすればよい．$\exists x < tA(x)$ に対しても同様である．例えば，次のような文を考えてみよう．

$$\forall x < \underline{1000} (\underline{2} < x \wedge \exists w < x (x = \underline{2} \times w) \supset \exists y < x \exists z < x (x = y + z \wedge y \text{は素数} \wedge z \text{は素数})$$

ここで「y が素数」は，有界量化記号だけを含む論理式 $1 < y \wedge \forall u < y \forall v < y \neg u \times v = y$ によって定義される．この文は，ゴールドバッハの予想が 1000 より小さいすべての数について成り立つことを述べたものだが，その真偽の問題は，上の方法を繰り返して適用することによって，有限個の $s = t$ または $s < t$ の形の文の真偽判定に還元される．有界量化記号だけを

含むようなものなら，他の文も同様である．じつは，有界文の真偽をこうして決定する推論は，ロビンソン算数の中で完全に行える．

有界論理式 $A(x)$ によって定義されるどんな自然数の集合 E も計算可能な集合になる．なぜなら，自然数 n が E に属することを調べるためには，私たちはただ文 $A(\underline{n})$ が真であることを調べるだけでよいからである．この逆は必ずしも成り立たない．つまり，有界論理式によっては定義できない計算可能集合がある．それでも，私たちはこの考え方を使って，計算可能性集合を形式的に特徴づけることができる．それを以下で見よう．

まず，有界論理式の否定は有界論理式で書ける．つまり，$\neg\forall x < tA(x)$ は $\exists x < t\neg A(x)$ と論理的に同値で，$\neg\exists x < tA(x)$ は $\forall x < t\neg A(x)$ と論理的に同値である．これらの法則に加え，$\neg(A \vee B)$ と $\neg A \wedge \neg B$ の同値性などの論理法則を繰り返して適用することによって，有界論理式の否定を別の有界論理式に書き換えられる．

さてここで，算術言語に対する「ゴールドバッハ類の文」の正式な定義を与える．以下は，**2.1** 節からの引用である．

> すでに見たように，ゴールドバッハの予想は，計算可能な性質 P について，「すべての自然数が性質 P をもつ」という形の言明として定式化できる．これはゴールドバッハの予想の論理的に大変重要な特性だ．以下では，この形の言明を**ゴールドバッハ類の言明**と呼ぼう．……じつは，この定式化では重要なポイントが隠れてしまっている．性質 P は単に計算可能であるだけなく，十分に単純な形式をもっていなければならない．つまり，数が性質 P をもつことを調べるアルゴリズムが，P の定義から読みだせることが必要である．

さて，私たちは，ゴールドバッハ類の文を，ある有界論理式 $A(x)$ に対して，$\forall xA(x)$ の形をした文として定義する．上で指摘したように，この定義は，個々の n に対して $A(n)$ が真かどうかを判定するアルゴリズムを $A(x)$ の定義式をもとにして構成できるという条件を満たしている．ゴールドバッハの予想が，この意味でのゴールドバッハ類の文として定式化できることは簡単にわかるが（その論理式の $\forall x$ の制限を外すように書き直

せ)，1.2 節で与えたインフォーマルな定義におけるゴールドバッハ類の言明のどれもが，ここでの定義のゴールドバッハ類の言明として表現されることは自明ではない．

これがそうなることを見るために，まずいくかの用語を導入する．$A(x)$ が有界量化だけを含む論理式であるとき，$\exists x A(x)$ を **Σ 論理式**と呼ぶ．(理論が **Σ 健全**であるというのは，この理論で証明可能なすべての Σ 論理式が真となることである．) いま，$\exists x A(x)$ が自由変数 y を含んでいるとする．これを $\exists x A(x, y)$ と書く．$\exists x A(x, \underline{n})$ が真となるような n の集合は計算的枚挙可能集合である．なぜなら，すべての文 $A(\underline{m}, \underline{n})$ について真偽を順次調べていって，$A(\underline{m}, \underline{n})$ が真になったら n を出力することで，その集合を並べ上げられるからである．この逆もまた成り立つ．すなわち，すべての計算的枚挙可能集合 E に対して，Σ 論理式 $\exists x A(x, y)$ が存在して，E は，$\exists x A(x, \underline{n})$ が真となるような n の集合と一致する．この証明には，第 3 章で与えた計算的枚挙可能集合のインフォーマルな定義を形式化する必要がある．例えば，チューリング機械の言葉を使い，形式的定義の算術化を伴う．(だから，証明はたくさんの緻密な形式的作業を伴うことになり，ここで実行を試みるわけにはいかない．) 実際，もし集合 E の定義が与えられ，それにより E が計算的枚挙可能であることを知っているとすれば (例えば，「E を，ある論理式とその否定の論理積 (conjunction) の ZFC での証明の集合であるとする」)，そのとき私たちは E を定義するような論理式 $\exists x A(x, y)$ を構成できる．「どんな n も E に属さない」という言明は，$\forall y \neg \exists x A(x, y)$ と定式化でき，これは $\forall z \forall y < z \forall x < z \neg A(x, y)$ のように同値変形できるから，形式的定義によるゴールドバッハ類の言明である．とくに，計算的決定可能であると知っている性質 P が与えられたとき，「すべての自然数が性質 P をもつ」という言明は，有界論理式 $A(x)$ を使って，$\forall x A(x)$ と定式化できる．なぜなら，この言明は「すべての n に対して，性質 P をもつ自然数の集合の補集合に n が属する」と同値になるからである．

同様な理屈によって，数の集合 E が計算的決定可能であることは，E とその補集合がともに計算的枚挙可能であることと同値である．したがって，計算的決定可能集合は，A を有界として，Σ 論理式 $\exists x A(x, y)$ でも，Π 論理式 $\forall x A(x, y)$ でも定義できる集合となる．

参考文献

[Boolos 89] Boolos, G., "A New Proof of the Gödel Incompleteness Theorem," *Notices of the AMS* **36** (April 1989), pp. 388 – 390.〔邦訳は『近代思想』1989年12月号に掲載（斉藤浩文訳)〕

[Calude *et al.* 01] Calude, C. S., Hertling, P., Khoussainov, B., and Wang, Y., "Recursively Enumerable Reals and Chaitin Omega Numbers," *Theoretical Computer Science* **255** (2001), pp. 125–149.

[Chaitin 82] Chaitin, G. J., "Gödel's Theorem and Information," *Intenational Journal of Theoretical Physics* **22** (1982), pp. 941–954.

[Chaitin 92] Chaitin, G. J., *Information-Theoretic Incompleteness*, World Scientific, Singapore, 1992.

[Chaitin 99] Chaitin, G. J., *The Unknowable*, Springer-Verlag, Singapore, 1999.〔『知の限界』黒川利明訳, エスアイビー・アクセス (2001)〕

[Chaitin 05] Chaitin, G. J., "Irreducible Complexity in Pure Mathematics," electronic draft, March 24, 2005.

[Chaitin 05] Chaitin, G. J., *Meta Math! The Quest for Omega*, Pantheon Books, New York, 2005.〔『メタマス！——オメガをめぐる数学の冒険』黒川利明訳, 白揚社 (2007)〕

[Chase and Jongsma 83] Chase, G. and Jongsma, C., *Bibliography of Christianity and Mathematics*, Dordt College Press, Sioux Center, IA, 1983.

[Dawson 97] Dawson, J., *Logical Dilemmas: The Life and Work of Kurt Gödel*, A K Peters, Natick, MA, 1997.〔『ロジカル・ディレンマ——ゲーデルの生涯と不完全性定理』村上祐子・塩谷賢訳, 新曜社 (2006)〕

[Feferman 60] Feferman, S., "Arithmetization of Metamathematics in a General Setting," *Fundamenta Mathematica* **49** (1960), pp. 35–92.

[Feferman *et al.* 86] Feferman, S., Dawson, J. W., Goldfarb, W., Parsons, C., and Sieg, W. (eds.), *Kurt Gödel: Collected Works*, Vo1. I–III, Oxford University Press, Oxford, 1986–1995.

[Feferman *et al.* 00] Feferman, S., Friedman, H., Maddy, P., and Steel, J., "Does Mathematics Need New Axioms?," *Bulletin of Symbolic Logic* **6** (2000), pp. 401–413.

[Franzén 04] Franzén, T., *Inexhaustibility: A Non-Exhaustive Treatment*, Lecture Notes

in Logic 16, Association for Symbolic Logic and A K Peters, Wellesley, MA, 2004.

[Hofstadter 79] Hofstadter, D., *Gödel, Escher, Bach: An Eternal Golden Braid*, Basic Books, New York, 1979.〔『ゲーデル，エッシャー，バッハ――あるいは不思議の環』野崎昭弘・はやしはじめ・柳瀬尚紀訳，白揚社（1985, 2005)〕

[Kadvany 89] Kadvany, J., "Refrections on the Legacy of Kurt Gödel: Mathematics, Skepticism, Postmodernism," *The Philosophical Forum* **20** (1989), pp. 161–181.

[Kline 80] Kline, M., *Mathematics: The Loss of Certainty*, Oxford University Press, Oxford, 1980.〔『不確実性の数学――数学の世界の夢と現実』上下，三村護・入江晴栄訳，紀伊国屋書店（1984)〕

[Kreisel 80] Kreisel, G., "Kurt Gödel," *Biographical Memoirs of Fellows of the Royal Society* **26** (1980), pp. 148–224.

[van Lambalgen 89] van Lambalgen, M., "Algorithmic Information Theory," *Journal of Symbolic Logic* **54** (1989), pp. 1389–1400.

[Li and Vitanyi 97] Li, M. and Vitanyi, P., *An Introduction to Kolmogorov Complexity and its Applications*, Springer-Verlag, New York, 1997.

[Lindström 01] Lindström, P., "Penrose's New Argument," *Journal of Philosophical Logic* **30** (2001), pp. 241–250.

[Lucas 61] Lucas, J. R., "Minds, Machines and Gödel," *Philosophy* XXXVI (1961), pp. 112–127.

[Lucas 96] Lucas, J. R., "Minds, Machines, and Gödel: A Retrospect," in P. J. R. Millican and A. Clark (eds.) *Machines and Thought: The Legacy of Alan Turing*, Vol. 1, Oxford University Press, Oxoford, 1996, pp. 103–124.

[Nagel and Newman 59] Nagel, E. and Newman, J., *Gödel's Proof*, Routledge & Kegan Paul, New York, 1959.〔『ゲーデルは何を証明したか――数学から超数学へ』林一訳，白揚社（1999)〕

[Penrose 89] Penrose, R., *The Emperor's New Mind*, Oxford University Press, Oxford, 1989.〔『皇帝の新しい心――コンピュータ・心・物理法則』林一訳，みすず書房（1994)〕

[Penrose 94] Penrose, R., *Shadows of the Mind*, Oxford University Press, Oxford, 1994.〔『心の影――意識をめぐる未知の科学を探る』1・2，林一訳，みすず書房（2001-2002)〕

[Penrose 96] Penrose, R., "Beyond the Doubting of a Shadow," *PSYCHE* **2**(23) (1996), electronic journal.

[Putnam 00] Putnam, H., "Nonstandard Models and Kripke's Proof of the Gödel Theorem," *Notre Dame J. of Formal Logic* **41**(1) (2000), pp. 53–58.

[Raatikainen 98] Raatikainen, P., "lnterpreting Chaitin's Incompleteness Theorem," *Journal of Philosophical Logic* **27** (1998), pp. 269–286.

[Rucker 95] Rucker, R., *Infinity and the Mind*, Princeton University Press, Princeton, NJ, 1995.〔『無限と心――無限の科学と哲学』好田順治訳，現代数学社（1986)〕

[Shapiro 03] Shapiro, S., "Mechanism, Truth, and Penrose's New Argument," *Joumal of*

Philosophical Logic **32** (2003), pp. 19–42.

[Shelah 03] Shelah, S., "Logical Dreams," *Bulletin of the AMS* **40**(2) (2003), pp. 203–228.

[Smullyan 92] Smullyan, R., *Gödel's Incompleteness Theorems*, Oxford University Press, Oxford, 1992.〔『ゲーデルの不完全性定理』高橋昌一郎訳，丸善（1996)〕

[Sokal and Bricmont 98] Sokal, A. D. and Bricmont, J., *Fashionable Non-sense: Postmodern Intellectuals' Abuse of Science*, Picador Books, New York, 1998.〔『「知」の欺瞞——ポストモダン思想における科学の濫用』田崎晴明・大野克嗣・堀茂樹訳，岩波書店（2000)〕

[Wang 87] Wang, H., *Refrections on Kurt Gödel*, MIT Press, Cambridge, MA, 1987.〔『ゲーデル再考——人と哲学』土屋俊・戸田山和久訳，産業図書（1995)〕

訳者あとがき

本書は，トルケル・フランセーン著 *Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to its Use and Abuse*（A K Peters, 2005）の全訳である．

原書は出版されるやいなや，この分野の専門家や関係者たちから絶賛されて，フランセーンはゲーデル生誕100年を祝うウィーンでの会議『真理の地平』の招待講演者に選ばれた．ところが不遇にも，骨癌に冒されていた著者はゲーデルの生誕記念日（2006年4月28日）目前の同年4月19日に，惜しまれて亡くなっている．

ゲーデルといえば，かつて *TIME* 誌が20世紀の偉大な科学者・発明家20人（組）の一人にあげたほど，欧米では知名度の高い人物である．本書のはしがきでフランセーンが，インターネットのどんなニュースグループでも遅かれ早かれ誰かがゲーデルの不完全性定理を持ち出すと語っているように，ゲーデルの名やその定理の引用は欧米の知的会話にかなりの頻度で現れる．そして，本書の目的は，まさにそういう一般的な引用における間違いを正すことにあるのだ．欧米知識人にはとりあえず備えておきたい識見を与えてくれる．

そこへもって本書では，アメリカ文化に浸っている人にとって刺激的な例文が次々と現れる．たとえば，「ランドの哲学は矛盾しているか不完全である」という例文が突如現れれば，ドキッとする人も多いだろう．原書には写真や図解は一切ないのだが，こういう刺激的な文がイラストの代役となり，読者を飽きさせない．また不思議なことに，日本語のローマ字文も登場する．第**3**章のはじめに「watashi wa neko da yo」といった文章がある．

だが，日本の読者にとっては，アメリカで熱狂的ファンの多い女流作家アイン・ランドの名も「私は猫だよ」の日本語文も，刺激にもユーモアにもならないだろう．そこで，日本語版作成にあたって，原書の軽妙さを保ちつつ，原著書が真に伝えたい内容を日本の読者にうまく伝えるにはどうしたらいいかと苦心惨憺した．その結論，イラストや図解などをできるだけ挿入して，日本的な体裁に手直しすることにした．原書にない脚注や文字飾りや網掛けなどもうる

さくならない程度に加えた．入れ物の形が多少変わっても，内容はまったく同じであるから，読者が原書の真のメッセージを少しでも受け取りやすくなっていれば幸いである．逆に，この体裁が別の誤謬を生じるようなことがあれば，その責めは挙げて訳者に帰する．

• • •

さて，さまざまな話題や誤解を生むゲーデルの定理は，そもそもどのような主張だったのだろうか？ 1931年のゲーデルのドイツ語原論文は，厳密にいえば，形式体系Pの拡大において決定不能な命題の存在を示しただけで，一般の不完全性定理の主張には到達していない．ゲーデル自身が，不完全性定理について明確に述べているのは，本人公認の英語訳に附記された次の文言（1963年8月28日）である．

ある程度の有限的算術を含むどんな無矛盾な形式体系にも決定不能な算術命題が存在し，さらにそのような体系の無矛盾性はその体系においては証明できない．

この定理を「決定不能な算術命題が存在する」という前半部と，「無矛盾性はその体系においては証明できない」という後半部に分け，前半を第一不完全性定理，後半を第二不完全性定理と呼ぶことが多い．ゲーデルは慎重に慎重を重ねて言葉を選んでいるので，この表現を安易に変えようとすると，必ず不具合を生じる．実際，この定理に対する誤解の多くはそのどれかの条件を落とすことで生じると，本書は考察する．とくに，フランセーンが注目するのは，「有限的算術を含む」という条件を落とすことによる誤解である．なお，有限的算術は，本書では初等的算術と呼ばれることが多いのだが，要するに自然数についての算数計算が何らかの形でおこなえることを意味する．

「ある程度の有限的算術を含む」という条件を，「十分大きな」「十分複雑な」「十分表現力のある」などといった曖昧な条件に置き換える悪癖が一般向けの解説などに横行している．曖昧というよりも，これは本当は間違いであって，大きな理論で完全なものもあれば，小さな理論で不完全なものもあることが，本書中でいくつかの実例によって指摘されている（**2.2**節，**8.1**節など）．

しかし，さらに見落しやすい点は，不完全性定理の前提に算術の条件がある

だけでなく，結論部にも算術の条件が掛かっていることである．つまり，第一不完全性定理は，算術を含む体系がその算術部分で不完全であるという主張であり，含まれている算術の外側が完全か不完全かについてはこの定理は何も語っていないのである．

これによってフランセーンにばっさり切り捨てられるのが，高名な物理学者のフリーマン・ダイソンとスティーヴン・ホーキングの論説である．彼らは，万物理論の可能性を否定するのにゲーデルの定理を持ち出したのだが，仮に物理理論に不完全性定理が適用できたとしても，不完全性はその算術部分に見つかるだけで，その理論が物理世界の記述として完全か不完全かは別問題なのである（**4.4** 節）．

第二不完全性定理の場合，算術に関する仮定はさらに本質的である．その結論部は無矛盾性が証明できないという主張であるが，より詳しくは，無矛盾性を表していると自然に解釈できるような命題を定義して，その命題の証明不可能性を言うことになる．そういう解釈をともなう命題を作るためには第一定理以上に強い算術の仮定が必要であり，さらに，何が自然な表現かについての議論もある．詳細は本文に委ねるが，フランセーンは「無矛盾性の証明不可能性は本当のところ“無矛盾性の主張不可能性”である」と述べている（**5.1** 節，**6.4** 節）。

第二不完全性定理を「どんな整合的機械システムについても，それが整合的であることはそのシステム内で証明できない」と言い換えてみよう．これを使って，われわれ人間が（整合的）機械ではないことを導きだす議論がいくつかあるが，大概何らかの論理的ギャップを含んでいる．例えば，このような第二定理を証明できる整合的機械があるとしてもよいが，その機械でも「自らの整合性を証明できない」ことを証明できるわけではない．これに関連しては，第 **6** 章にルーカスやペンローズによる種々の議論とその問題点が紹介されている．

以上のように，不完全性定理の誤解や誤用の多くが，この定理を用いる際に「ある程度の算術を含む」という条件を落とすことに起因している．では，この条件そのものを数学的に，とくに計算可能性理論を用いて，分析すると何が導けるだろうか？　フランセーンが繰り返し強調する事実は，彼が「ゴールドバッハ類」と呼ぶ（ふつう計算可能性理論では，Π^0_1 と呼ぶ）形の言明については，（算術を含んだ）どんな無矛盾な体系であれ，証明できさえすれば，真であることがわかるというものである．

計算可能性理論は，そもそもゲーデルの定理の証明から派生したものだが，逆にこの定理を観察する際にも多くの示唆を与えてくれる．本書では，専門家以外にはまだほとんど知られていないようなこの分野の事実のいくつかをわかりやすく紹介している．

● ● ●

著者のフランセーンは，スウェーデンのルレオ工科大学の計算機科学・電子工学科でプログラミングの講義を担当していたが，研究者としての出発点は数理哲学である．ストックホルム大学でD. プラヴィッツ教授に師事し，「証明可能性と真理」という論文で1987年に哲学の博士号を取得している．この論文は，数学の実在論について論じたものであるが，本書にしばしば現れる「ゴールドバッハの予想が〈真〉であるとはすなわち，2より大きな偶数は2つの素数の和で表せるということである」といったフレーズもここですでに使われている．

学位取得後はあまり目立つ研究活動はしていなかったが，本書の前年に書かれた著書［1］と論文［2］によって突然学界に返り咲き，注目を集めるようになった．

［1］ *Inexhaustibility: A non-exhaustive treatment*, Lecture Notes in Logic vol. 16, Association for Symbolic Logic, A K Peters, 2004.

［2］ "Transfinite progressions: a second look at completeness," *Bull. Symbolic Logic* 10 (2004), no. 3, 367–389.

これらの研究テーマは，本書でもところどころで議論されている理論の拡大列に関するものである．もともとは，ゲーデルの原論文の脚注48aに書かれたアイデアから出発して，その後チューリングがチャーチのもとで書いた学位論文のなかでこれを定式化し，さらにソロモン・フェファーマンによって再検討された．フランセーンの仕事はそれらに続く，いわば数学基礎論本道の研究であった．このような優れた研究を中絶せざるを得なくなったのは，故人はもとより，この分野の多くの研究者が惜しむところである．

生前の彼のウェブページには，倫理学者のスピノザや禅僧の盤珪永琢の言葉が掲げられ，ネット上での空しい口論を戒める彼の深慮が表れていた．本書についても，ゲーデルの定理とその関連事実について，数学的に正しい説明を与

え，かつ数学外の誤用を冷静に正すという以上に，論争を煽るようなところは決してない．また，他人の揚げ足を取ったり，逆に故意に無視したり，素人の間違いを蔑むようなところもない．

たまたまこの原書と同じころ書店に並んだ米国の女性哲学者によるゲーデル関係の本が，専門誌の書評でひどく叩かれていた．その本は全体として読み易く，一般読者からの評判は上々であったが，証明の核である不動点定理の説明のところに根本的な勘違いがあるのだ．同じような間違いは他の入門書でもときどき見かけるから，当然フランセーンもそうした非専門家のミスはたくさん知っていただろう（一般の哲学者は，論理の専門家ではない）．しかし，本書では，侮蔑的に他書を批判するようなところはまったくない．ときどき百科事典の解説をからかうのは，相手がそれだけの権威を与えられているからだ．

● ● ●

本書の全体構成を見ておこう．本書は，8 つの章で構成されている．最初の章は，2 つの不完全性定理の簡単な説明と，ゲーデルの人生や他の仕事についての最小限の紹介である．そして，第 2 章は，不完全性定理をめぐる議論の概要であり，それは本書の要約でもある．特徴としては，2.1 節で算術とは何かについて，かなり丁寧かつ具体的に説明していることである．珍しい導入の仕方だが，不完全性定理の主張を数学的に正しく理解するためには，うまい布石になっている．そのあと，第一，第二不完全性定理に関するさまざまな基本事項が説明される．ほとんどが標準的なものであるが，2.7 節において，ゲーデルの証明がどこまで自己言及的かを分析しているのは，他書にない鋭い洞察である．その後，2.8 節ではゲーデルの定理がポストモダン的状況を引き起こすというカドバニーの主張について，2.9 節ではルーカスの反機械論について簡単なコメントが述べられ，それらは後の章の詳しい議論の導入になっている．

第 3 章と本書最後の 2 つの章が，とくに数学色の強い部分である．第 3 章では，ゲーデルの証明をふまえてチューリングらが始めた計算可能性理論の基本を解説し，それに基づいて第一不完全性の別証明が紹介される．章末にあるゲーデルの加速定理は，一般の方にはあまり知られていないと思うが，計算可能性理論の効力を示す興味深い事実である．

第 4，5，6 章は，ゲーデルの定理の「応用もどき」について検討する．主な内容はすでに上でも述べたものである．第 4 章は，第一不完全性定理が万

物理論の否定などに用いられる場合の問題点を扱う．第5章は，第二不完全性定理が導くと思われている懐疑論について検討する．この章では，数学的な話題として，レープの定理の説明もある．そして，第6章では，ルーカスとペンローズの反機械論について詳しく点検する．

第7章では，ゲーデルが不完全性定理を発見する前の年に証明した，1階論理の完全性について解説する．この定理は，「1階論理」とよばれる仕組み（ホワイトヘッド＝ラッセルの階型理論をヒルベルトが簡易化したもの）が，論理装置として改良の余地がないほど完成していることを示すものである．そして，論理装置が完成しているからこそ，その上に数学のさまざまな公理系を乗せることで，数学の形式理論が定式化されるというゲーデルの発想が生まれ，これが不完全性定理の発見の重要な背景にもなっている．完全性定理の証明の要所は，「無矛盾な理論はモデルをもつ」ことであり，この論法によってさまざまなモデルが構成できるようになり，それが今日の超準解析学などの発展につながった．

第8章のテーマの一つは，ランダム性である．ランダム性は定式化が難しい概念であり，計算可能性理論の概念を借りて厳密な定義が与えられるようになったのは，ここ二、三十年のことである．そして，ランダム性と不完全性定理を結びつけるいくつかの興味深い研究がチャイティンによっておこなわれている．チャイティンの数学的発見は素晴らしいのだが，彼は自分の研究を意味不明な比喩で語る．本書では，彼の数学と非数学をきちんと分けてうまく解説している．最後の8.3節では，巨大基数を仮定することで決定不能命題を決定しようという所謂「ゲーデル・プログラム」と，新しい算術独立命題を示したパリス＝ハーリントンの定理について説明している．

また補遺では，算術の形式体系の厳密な定義が与えられ，本書のキーワードである「ゴールドバッハ類」についても詳しく説明されている．

• • •

いま試みに，フランシス・ベーコンの4つのイドラ説を用いて，ゲーデルの定理のさまざまな誤用を分類してみよう．イドラ（偶像）というのは，真理を正しく見ることを阻む偏見，ないしそれによって生じる虚偽のことで，ベーコンは4つの種類をあげている．まず，人類一般に共通な「種族のイドラ」．人間の悟性が陥りやすい間違った傾向のことだ．たとえば，自分が思いつく有

意義そうな体系がどれもこれも不完全であるならば，有意義な体系はすべて不完全であると思い込み，さらにその原因を定理か何かに帰着させようとする傾向は誰にもあるだろう（**2.3** 節）．

次に，「洞窟のイドラ」は，各個人の境遇や習慣や教育等によって形成される偏見であり，いわば井の中の蛙の自説である．ゲーデルは，彼より先に「完全性定理」のパーツをすべて入手していたスコーレムが，それを「定理」として組み立てられなかった理由を，スコーレムの「有限主義」へのこだわりの所為と述べている（**1.2** 節）．これからもわかるように，ゲーデル自身は少なくとも彼の 20 代においては，特定の思想に偏らず，純粋に数学的なモチベーションで研究を進めていた．したがって，不完全性定理を，たとえば「ヒルベルトのプログラム」の否定といった特定の思想面だけで捉えるのは洞窟のイドラといえよう（**2.6** 節および **5.2** 節）．

われわれにとって，とくに重要なのが残りの２つだ．まず，言語の使用から生ずる「市場のイドラ」がある．ベーコンの言によれば，「人は自分の理性が言語を支配すると信じているが，言語が悟性を支配することもまた事実である」という．不完全性定理の主張に含まれる「矛盾」「完全」「体系（システム）」などの語は日常言語において多様な使われ方をしており，ゲーデルの定理がこれらのインフォーマルな意味と結びつけられてしまっていても不思議はないとフランセーンは指摘する（**1.1** 節，第 **4** 章）．

最後に「劇場のイドラ」である．大別して，諸学説の脚色に起因するものと，論証の誤りから生じるものがあるが，ここで考量すべきは前者である．ベーコンは，哲学の学説も芝居の脚本と同じだと言い切る．学説を唱える場合に，合理派や経験派の一方に偏ると洞窟のイドラがもたらされるが，中間的であろうとしても妄想や懐疑が入り込む危険がある．最も危ない例として，「迷信的哲学」や「アカタレプシア（不可知論）」を唱えるプラトン学派が批判される．迷信的哲学は反機械論（**2.9** 節，第 **6** 章），アカタレプシアは懐疑論（**2.8** 節，第 **5** 章）に相応するであろうか．以上でうまい整理ができたとも思えないが，読者の考察の一助になれば幸いである．

● ● ●

ここで，この本と訳者との関わりについて簡単に述べておきたい．私が原書を入手したのは 2006 年の初めで，そのころ『ゲーデルと 20 世紀の論理学』

(東京大学出版会)というシリーズ本の編集主幹をしていた．役目柄，ゲーデルの名の付く本は大概目を通していたので，一見地味な装丁のこの原書も見逃すことなく一読し，これが他書と一線を画する意欲的な本であることがわかった(もっとも，編集に役立てるには，入手が遅すぎた)．それで，みすず書房から翻訳依頼があったときには二つ返事でお引き受けしたのだが，その後の作業は思いもよらず難行した．ひと通りの訳は2009年夏ごろにはできたのだが，先にも述べたように日本の読者にとって読みやすい本にするため，多くのイラスト原案を編集部と一緒に考え，また文章も徹底的にわかりやすいものに書き直した．これは私の意志というよりも，みすず書房の編集者市原加奈子女史の本作りへのこだわりがなせる業であった．本書は訳書でありながら，私にとっては最初から1冊書き下ろす以上の手間がかかっているが，市原さんの苦労は多分2，3冊分だったであろう．その熱意に脱帽するとともに，ずいぶん多くのことを教えていただいたことを心より感謝している．しかし，補足的な説明を加えたため，思わぬ間違いまで混入されているようであれば，その責めは当然私が負わねばならない．お気づきの点などがあれば，読者諸賢に是非ご教示いただきたい．

ここ数年，多くのゲーデル愛好家と知り合うことができ，また学外の勉強会にしばしば講師として呼ばれるようになった．そうした講演会の副読本として，話題豊富な本書はたいへん重宝であった．とくに，地元仙台の勉強会では約1年間この本をテキストに使い，そこでの講演経験は本書の制作にも大いに役立った．その勉強会を主催して下さった仙台往診クリニックの川島孝一郎院長はじめ，常連の参加者にはたいへんお世話になり，ここに感謝の意を表する次第である．

最後に，私の原稿を読んでいろいろ意見をくれた私の学生たちにもお礼を云いたい．彼らとの日々の議論なしには，この作業のモチベーションは続かなかったかもしれない．また，私のアウトリーチ活動を日ごろ応援して下さっている研究仲間や同僚，それからこれまでの活動に正のフィードバックを下さった多くの方々，そしてとくに本書を読んで下さった貴方には一番感謝しなければならない．皆さん，どうもありがとう．

2011年2月

田中 一之

索 引

〔各見出し語の本書における定義を示すページ，見出し語が小見出し相当のあつかいとなっているページは太字とする.〕

ナ

ハ

著者略歴

(Torkel Franzén, 1950-2006)

1987年に学位論文「証明可能性と真理」でストックホルム大学よりPh.D.(哲学)を取得. ルレオ工科大学(スウェーデン)計算機科学・電子工学科に講師として長年勤め, プログラミングを教えた. 数理論理学と計算機科学を専門とし, 主要な関心であったゲーデルの定理に関して本書(*Gödel's Theorem: An Incomplete Guide to Its Use and Abuse*, A K Peters, 2005)と, より専門的な著書 *Inexhaustibility: A Non-Exhaustive Treatment*, (Lecture Notes in Logic, #16)(Association for Symbolic Logic and A K Peters, 2004)があり, いずれも高く評価されている. Usenetのsci.math, sci.logicなどのニュースグループでゲーデルの定理に関連する話題を活発に議論し, その経験も本書に活かされている.

訳者略歴

田中一之〈たなか・かずゆき〉1955生まれ. カリフォルニア大学バークレー校で, 新しい算術独立命題を発見したハーリントン教授に師事し, Ph.D.を取得(1986). 現在, 東北大学大学院理学研究科数学専攻教授. 専門は数学基礎論で, とくに「逆数学」の研究で国際的に知られる. 著書に, 『ゲーデルと20世紀の論理学』(全4巻)(編著, 東京大学出版会, 2007), 『数学のロジックと集合論』(共著, 培風館, 2003), 『数の体系と超準モデル』(裳華房, 2002), 『基礎課程 線形代数学』(共著, 培風館, 1998), 『逆数学と2階算術』(河合文化教育研究所, 1997), 『数学基礎論講義』(編著, 日本評論社, 1997)ほか多数.

トルケル・フランセーン
ゲーデルの定理
利用と誤用の不完全ガイド
田中一之訳

2011年 3月25日　第1刷発行
2011年 6月 3日　第2刷発行

発行所 株式会社 みすず書房
〒113-0033 東京都文京区本郷5丁目32-21
電話 03-3814-0131(営業) 03-3815-9181(編集)
http://www.msz.co.jp

本文組版 キャップス
図版制作 日本グラフィックス
本文印刷所 理想社
扉・表紙・カバー印刷所 栗田印刷
製本所 青木製本所

ISBN 978-4-622-07569-1
[ゲーデルのていり]

生命の跳躍 進化の10大発明	N. レーン 斉藤隆央訳	3990
ミトコンドリアが進化を決めた	N. レーン 斉藤隆央訳 田中雅嗣解説	3990
自己変革するDNA	太田邦史	2940
進化論の時代 ウォーレス＝ダーウィン往復書簡	新妻昭夫	7140
生物多様性〈喪失〉の真実 熱帯雨林破壊のポリティカル・エコロジー	ヴァンダーミーア／ペルフェクト 新島義昭訳 阿部健一解説	2940
心は遺伝子の論理で決まるのか 二重過程モデルでみるヒトの合理性	K. E. スタノヴィッチ 椋田直子訳 鈴木宏昭解説	4410
大気を変える錬金術 ハーバー、ボッシュと化学の世紀	T. ヘイガー 渡会圭子訳 白川英樹解説	3570
ナノ・ハイプ狂騒 上・下 アメリカのナノテクノ戦略	D. M. ベルーベ 五島綾子監訳 熊井ひろ美訳	I 3990 II 3780

（消費税 5%込）

みすず書房